TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: L'embolcall vectorial: del món afí al món lineal

Autor: Raül Navarro Forns

Director: Xavier Gràcia Sabaté

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2019 - 2020

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en matemàtiques

Treball de fi de grau

L'embolcall vectorial: del món afí al món lineal

Raül Navarro Forns

Supervisat per Xavier Gràcia Sabaté

Juny 2020

Resum

Aquest treball tracta el concepte d'embolcall vectorial: una construcció que permet inserir de forma canònica un espai afí com a hiperplà en un espai vectorial. Seguint diversos tractats de geometria, i utilitzant les eines de l'àlgebra lineal i la geometria afí, s'han estudiat els espais afins, les varietats afins i les afinitats des d'un punt de vista "lineal". Com a aplicació, s'ha analitzat la completació projectiva d'un espai afí. També es mencionen algunes aplicacions a la representació gràfica de corbes.

Paraules clau: Espai afí, espai vectorial, hiperplà, camp vectorial, immersió canònica, afinitat, aplicació lineal, embolcall vectorial, completació projectiva.

Abstract

This project deals with the vector hull: a construction that leads to an embedding of an affine space as a hyperplane in a vector space. Following the work of several books and articles in geometry, and using linear algebraic and geometrical tools, a study from a "linear" point of view of affine spaces, affine functions and affine subspaces has been made. As an application, the projective completion of an affine space has been analysed. In addition, an aplication to the graphical representation of curves has been done.

Keywords: Affine space, vector space, hyperplane, vector field, canonical embedding, affine function, linear map, vector hull, projective completion.

Resumen

Este trabajo trata el concepto de envoltura vectorial: una construcción que permite inserir de manera canónica un espacio afín como un hiperplano en un espacio vectorial. Siguiendo diversos tratados de geometría, así como usando las herramientas del álgebra lineal y la geometria afín, se ha hecho un estudio de los espacios afines, las variedades afines y las afinidades des de un punto de vista "lineal". Como aplicación, se ha analizado la completación proyectiva de un espacio afín. También se mencionan algunas aplicaciones a la representación gráfica de curvas.

Palabras clave: Espacio afín, espacio vectorial, hiperplano, campo vectorial, inmersión canónica, afinidad, aplicación lineal, envoltura vectorial, completación proyectiva.

Mathematics Subject Classification: 14R10 · 15A · 51N10 · 51N15

Índex

1 Introducció

Tot estudiant i professional del món de les matemàtiques coneix els conjunts més elementals de l'àlgebra i la geometria: l'espai vectorial i l'espai afí. Com és ben sabut, la linealitat és una propietat que agrada molt als matemàtics i científics, ja que facilita en gran mesura els càlculs i raonaments.

Malauradament, és una propietat poc freqüent, i els matemàtics han de trobar maneres de treballar sense aquest avantatge. La geometria afí no n'és una excepció, i des dels primers cursos del grau de matemàtiques els estudiants han de manipular eines més farragoses que dificulten tant la comprensió com el càlcul i les demostracions dels resultats més importants.

Aquest treball presenta un pont entre el món afí i el món lineal, que no és un altre que l'embolcall vectorial, una construcció canònica que permet veure un espai afí qualsevol com a part d'un espai vectorial i mitjançant la qual s'hi pot treballar amb les eines que la linealitat proveeix i on tant còmodes se senten els matemàtics. Això ofereix una forma alternativa de treballar sobre els espais afins, i ofereix resultats molt interessants que permeten estudiar-los amb profunditat.

A més, aquesta nova eina permet fer una construcció amb la qual relacionar la geometria afí amb la geometria projectiva. Com és ben conegut, els espais projectius es construeixen mitjançant relacions d'equivalència en espais vectorials, i construint l'espai projectiu de l'embolcall vectorial s'obté de nou un espai que també conté l'espai afí: la completació projectiva. Per tant, es pot trobar un segon context sobre el qual es poden estudiar les propietats dels espais afins.

L'embolcall vectorial i la completació projectiva donen, per tant, dos punts de vista des dels quals es pot treballar sobre espais afins.

Aquestes construccions compleixen una propietat rellevant: ambdues són construccions canòniques, és a dir, la seva construcció (i per tant la seva existència) només requereix de la pròpia definició d'espai afí, sense necessitat d'haver de recórrer a una tria particular de punts o coordenades.

Una de les diverses aplicacions de l'embolcall vectorial és l'estudi dels splines, fet que el converteix en una eina de gran utilitat en l'estudi de corbes i superfícies a l'espai.

Objectius

L'objectiu principal del treball és donar una construcció de l'embolcall vectorial, basant-se en resultats sobre hiperplans en espais vectorials, que permeti fer un estudi exhaustiu de les propietats dels espais afins aprofitant la linealitat de l'embolcall.

Donada aquesta construcció, es definirà la completació projectiva d'un espai afí, mitjançant la qual s'estudiaran, entre altres, les varietats afins i les afinitats.

També es veura l'ús que té l'embolcall vectorial en l'estudi de les corbes i les superfícies en l'espai.

Finalment, s'estudiarà com diferents autors han treballat sobre el concepte de l'embolcall vectorial, i se'n veuran diferents construccions.

Recursos

S'han utilitzat diversos llibres i articles per recopilar la informació exposada al treball.

Per una banda, els llibres de Berger i Frenkel [1, 4], dos importants tractats de geometria, han estat la base per fer la construcció de l'embolcall vectorial. Els dos llibres tenen seccions íntegrament dedicades a la definició de l'embolcall i les seves implicacions en l'estudi de les propietats dels espais afins.

Aquesta definició se sustenta en els resultats sobre hiperplans en espais vectorials que es presenten a [6], un article de Xavier Gràcia i Rubén Martín que ha inspirat aquest treball, i del qual també s'extreu un plantejament alternatiu en l'estudi de l'embolcall vectorial.

Per altra banda, s'ha utilitzat el llibre de Gallier [5] per introduir el concepte de la completació projectiva. Es tracta d'un llibre molt extens en el que també s'han trobat aplicacions de l'embolcall i la completació projectiva, que s'han complementat amb l'article de Ramshaw [7].

Altres llibres com [2] i articles com [3] han proporcionat diferents construccions de l'embolcall vectorial.

A banda d'això, els recursos matemàtics emprats han estat diferents resultats d'àlgebra lineal, geometria afí i projectiva, així com alguna definició de teoria de grups.

S'han elaborat diagrames amb l'eina TikZ de LaTeX; aquests diagrames pretenen facilitar la comprensió de diferents elements i propietats, tractant els exemples més comuns d'espais afins i vectorials.

Val a destacar que s'ha tractat un tema sobre el qual és difícil trobar referències, ja que molts llibres de geometria, tant afí com projectiva, no en parlen.

Continguts

El treball s'estructura en 7 seccions. A continuació es presenta un breu resum dels continguts de cada secció, juntament amb la bibliografia emprada per cada una.

Secció 2

Aquesta secció introdueix diferents conceptes sobre espais afins, que es poden trobar a [1, 4, 6]. Es donen tres definicions d'espai afí, que s'utilitzaran al llarg del treball, així com alguns exemples que seran rellevants posteriorment. També es presenten les definicions d'afinitat, referència afí i varietat afí.

Secció 3

Aquesta secció recull els resultats exposats a [1, 6], que formen la base sobre la que es construeix l'embolcall vectorial. Es veurà com, en un espai vectorial, els hiperplans que no contenen el zero permeten fer descomposicions de l'espai, juntament amb una caracterització d'aquests hiperplans mitjançant formes lineals.

Secció 4

En aquesta secció es presenta la construcció de l'embolcall vectorial vista a [1, 4].

També es fa un estudi de les bases de l'embolcall exposat a [5], i com aquestes es relacionen amb les referències de l'espai afí.

Es presenta el concepte de prolongació lineal d'una afinitat, que és l'aplicació lineal entre els respectius embolcalls vectorials que aquesta origina, així com les seves propietats que, com es mostra en aquesta secció, permeten estudiar les característiques d'una afinitat.

És important remarcar que en ambdós llibres es presenta l'embolcall vectorial com una eina per poder fer combinacions lineals de punts de l'espai afí, i per tant poder-hi introduir la noció de baricentre. Per tant, a més de la construcció de l'embolcall, es presenten diferents aplicacions del càlcul baricèntric, com ara la caracterització de les varietats afins i les afinitats.

Secció 5

En aquesta secció es presenta la completació projectiva d'un espai afí, que es pot trobar a [4, 5].

En primer lloc es presenta la definició d'espai projectiu, juntament amb una discussió sobre la dimensió d'aquest espai.

Seguidament, es construeix la completació projectiva, i es mostra com aquesta construcció compleix una propietat universal. A més, es raona com el complementari d'un hiperplà $\mathbf{P}(H)$ d'un espai projectiu $\mathbf{P}(E)$ té estructura d'espai afí.

Finalment, es veu com una varietat afí es correspon a un subespai projectiu de la completació projectiva, i es presenta una caracterització de les varietats afins paral·leles. D'altra banda, i d'una manera similar a la prolongació lineal d'una afinitat, es presenta la prolongació projectiva d'una afinitat entre les corresponents completacions projectives, i es dóna una caracterització d'afinitat utilitzant aquesta nova eina.

Secció 6

Aquesta breu secció il·lustra la presència de l'embolcall vectorial en el camp de les matemàtiques aplicades.

En primer lloc es dóna un resultat important en l'estudi dels polinomis, el principi de polarització, i es defineixen els polinomis en espais afins usant aquest principi juntament amb l'embolcall vectorial.

Aquestes definicions permeten parlar de splines en espais afins, que porten a l'estudi de corbes i superfícies en l'espai.

Secció 7

En aquesta secció es treballa sobre la construcció de l'embolcall vectorial feta a [6], que el presenta com la solució a un problema universal per espais afins. Aquesta manera de plantejar l'embolcall, completament diferent a la de [1, 4], és per tant menys artificial, i permet definir l'embolcall vectorial com un functor entre la categoria dels espais afins i la categoria dels espais vectorials.

Per altra banda, aquesta construcció defineix una eina que no es troba a la secció 4, que és l'homogeneïtzació d'una afinitat entre un espai afí i un espai vectorial. En aquesta secció s'estudiarà aquesta aplicació i es veurà com permet estudiar l'aplicació que, a cada afinitat entre espais afins, li assigna la seva prolongació lineal entre embolcalls vectorials.

Al final d'aquesta secció es presenta un petit repàs bibliogràfic en el qual es mostra com diferents autors presenten o fins i tot construeixen l'embolcall vectorial.

2 Espais afins

En aquesta secció es presenten definicions dels elements més bàsics de la geometria afí que es poden trobar a [1, 4]. Més concretament, es donen diferents definicions d'espai afí, la definició d'afinitat i la de varietat afí.

Sigui E un conjunt no buit, $\mathfrak{S}(E)$ el grup de les permutacions de E (és a dir, les aplicacions bijectives de E en E). Diem que un subgrup T de $\mathfrak{S}(E)$ és *transitiu* si

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \exists g \in T \quad \text{tal que} \quad x' = g(x)$$

Definició 2.1. *Anomenem espai afí sobre el cos K la terna $(A, \vec{A}, \varphi)$ on A és un conjunt no buit, $\vec{A}$ un espai vectorial sobre K i φ un isomorfisme del grup additiu de $\vec{A}$ en un subgrup transitiu T de $\mathfrak{S}(A)$.*

$\vec{A}$ s'anomena *espai director* de $(A, \vec{A}, \varphi)$, i una permutació de A pertanyent a T una *translació* de $(A, \vec{A}, \varphi)$. Anomenem *dimensió* de A la dimensió de $\vec{A}$ sobre K, i direm que l'espai afí A està modelat en $\vec{A}$.

En el que segueix es faran els següents abusos de notació:

1. Designarem la tupla $(A, \vec{A}, \varphi)$ per A sempre que no hi hagi ambigüitat amb l'espai director $\vec{A}$ o l'aplicació φ.

2. Identifiquem, gràcies a φ, $\vec{A}$ amb la seva imatge T, que té estructura d'espai vectorial i que anomenem *espai vectorial de les traslacions de A*.

3. Donat un $\vec{\xi} \in \vec{A}$, tenim que $\varphi(\vec{\xi})(x)$ és la transformada de $x \in A$ per la permutació $\varphi(\vec{\xi})\colon A \longrightarrow A$. Mentre que identificarem $\vec{\xi}$ i $\varphi(\vec{\xi})$ en el sentit de (2), notarem simplement $\varphi(\vec{\xi})(x)$ per $x + \vec{\xi}$ (on $x \in A$, $\vec{\xi} \in T$).

Tenint en compte els abusos de notació presentats, podem introduïr una nova definició d'espai afí, que ens durà a una caracterització mitjançant tres axiomes, que veurem a continuació:

Definició 2.2 (Segona definició d'espai afí)**.** *La tupla $(A, \vec{A}, \Phi)$ és un espai afí en el cos K si i només si Φ és una acció simplement transitiva del grup additiu de l'espai vectorial $\vec{A}$ en el conjunt A.*

Observació 2.1. *Direm que A és un espai afí si compleix les següents propietats:*

- *(A1)*: $\forall (\vec{\xi}, \vec{\xi}') \in \vec{A} \times \vec{A},\ \forall x \in A$ *es compleix* $(x + \vec{\xi}) + \vec{\xi}' = x + (\vec{\xi} + \vec{\xi}')$
- *(A2)*: $\{\vec{\xi} \in \vec{A} \mid \forall x \in A,\ x + \vec{\xi} = x\} = \{0\}$
- *(A3)*: $\forall (x, x') \in A^2,\ \exists \vec{\xi} \in \vec{A}$ *tal que* $x' = x + \vec{\xi}$

Recíprocament, una aplicació $(\vec{\xi}, x) \longmapsto x + \vec{\xi}$ de $\vec{A} \times A$ dins A verificant els axiomes anteriors dota A d'una estructura afí $(A, \vec{A}, \varphi)$, on $\varphi(\vec{\xi})\colon x \longmapsto x + \vec{\xi}$.

En efecte, la condició (A3), tenint en compte (A1) i (A2), implica que $x \longmapsto x + \vec{\xi}$ és una bijecció de A en A; aleshores (A1) diu que φ és un homomorfisme de $\vec{A}$ amb un subgrup de $\mathfrak{S}(A)$, (A2) que aquest homomorfisme és injectiu i (A3) que aquest subgrup és transitiu.

Proposició 2.1 (Tercera definició d'espai afí)**.** *Sigui A un conjunt no buit, $\vec{A}$ un espai vectorial sobre el cos K. Per tal que existeixi una aplicació $\Phi\colon \vec{A} \times A \longrightarrow A$ tal que $(A, \vec{A}, \Phi)$ sigui un espai afí és necessari i suficient que existeixi una aplicació $\Theta\colon A \times A \longrightarrow \vec{A}$ tal que:*

· *($A1'$): $\forall x \in A$, $\Theta_x \colon A \ni y \longmapsto \Theta(x,y) \in \vec{A}$ és una bijecció.*

· *($A2'$): $\Theta(x,y) + \Theta(y,z) = \Theta(x,z)$ per a tot $x, y, z \in A$. Aleshores tenim:*

$$\Phi(t,x) = \Theta_x^{-1}(t)$$

Demostració. Notem primer que (A2$'$) implica, per tot x, y, z:

1. $\Theta(x,x) = 0$
2. $\Theta(x,y) = -\Theta(y,x)$
3. $\Theta(x,y) + \Theta(y,z) + \Theta(z,x) = 0$

Demostrem ara la proposició:

Sigui $\Theta \colon A \times A \longrightarrow E$ un espai afí, $\Phi_x : t \longmapsto \Phi(t,x)$ és injectiva (ja que $\vec{A}$ opera simplement) i exhaustiva (ja que $\vec{A}$ opera transitivament), i és per tant una bijecció de $\vec{A}$ dins A. Per tant, per tot $(x,y) \in A \times A$:

$$\Theta(x,y) = \Phi_x^{-1}(y) \Leftrightarrow \Phi\left[\Theta(x,y), x\right] = y$$

Aleshores, (A1$'$) es verifica perquè $\Theta_x = \Phi_x^{-1}$. A més:

$$\begin{aligned}\Phi\left((\Theta(x,y) + \Theta(y,z)), x\right) &= \Phi\left((\Theta(y,z), \Phi(\Theta(x,y), x)\right) = \\ &= \Phi\left(\Theta(y,z), y\right) = z = \Phi\left(\Theta(x,z), x\right)\end{aligned}$$

i (A2$'$) resulta del fet que Φ opera simplement.

Recíprocament, sigui Θ satisfent (A1$'$) i (A2$'$). Considerem $\Phi(t,x) = \Theta_x^{-1}(t)$. Aleshores, Φ és una acció ja que, per una banda, tenim

$$\Theta(x,x) = 0 \;\Rightarrow\; \Phi(0,x) = \Theta_x^{-1}(0) = x \quad \forall x \in A$$

Per altra banda, siguin $u, v \in \vec{A}, x \in A$. Aleshores:

$$\Phi\left(u, \Phi(v,x)\right) = \Theta^{-1}_{\Phi(v,x)}(u) = \Theta^{-1}_{\Theta_x^{-1}(v)}(u) = \Theta_x^{-1}(u+v) = \Phi(u+v, x)$$

i per tant $(A, \vec{A}, \Phi)$ és un espai afí. □

Hem vist diverses definicions d'espai afí, que s'utilitzaran segons convingui en el que segueix. Vegem-ne alguns exemples rellevants:

1. Estructura afí d'un espai vectorial: sigui E un espai vectorial, si considerem $A = E$ i $\Phi(t,x) = t + x$ per a $t, x \in A$, aleshores (A, A, Φ) és un espai afí.

2. Sigui E un K- espai vectorial, $f \colon E \longrightarrow K$ una forma lineal no nul·la en E. Considerem:

$$\vec{A} = f^{-1}(0), \qquad A = f^{-1}(1), \qquad \Phi(t,x) = x + t \quad \text{per a} \quad x \in A, t \in \vec{A}.$$

   Aleshores $(A, \vec{A}, \Phi)$ és un espai afí. Veurem més endavant que, de fet, tot espai afí es pot definir d'aquesta manera.

Definició 2.3. *Sigui $(A, \vec{A}, \Phi)$ un espai afí, $a \in A$. Prendre a com l'origen de A és, per definició, dotar A de l'estructura d'espai vectorial de $\vec{A}$ mitjançant la bijecció*

$$\Phi_a \colon \vec{A} \longrightarrow A \qquad \textit{definida per} \quad \Phi_a(\vec{t}) = a + \vec{t}$$

Un cop definit espai afí, el següent pas és estudiar les aplicacions entre espais afins, més concretament les afinitats.

Definició 2.4 (Afinitat)**.** *Donats A, A' espais afins modelats per E, E', $f\colon A \longrightarrow A'$ és una aplicació afí o afinitat si existeix una aplicació lineal $\vec{f}\colon E \longrightarrow E'$ tal que $f(p+\vec{u}) = f(p)+\vec{f}(\vec{u})$.*

En el cas de treballar en dimensió finita, es defineixen les referències afins per tal d'usar coordenades.

Definició 2.5 (Referència)**.** *Una referència (afí) per un espai afí A de dimensió n consisteix en $n+1$ punts $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ de A tals que $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ és una base de $\vec{A}$. Les coordenades de $x \in A$ en aquesta referència són els escalars $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,n}$ tals que $\overrightarrow{x_0x} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i}$, és a dir, les coordenades de $\overrightarrow{x_0x}$ en la base $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$.*

Observem que la família de $n+1$ punts $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ en A determina la família de n vectors $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ en $\vec{A}$. Recíprocament, donat un punt $x_0 \in A$ i una família de vectors $\{u_i\}_{i=1,\ldots,n}$ obtenim una família de punts $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, on $x_i = x_0 + u_i$, $1 \leq i \leq n$.

Per tant, és equivalent considerar una família de $n+1$ punts $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ en A i un parell $\{x_0, \{u_1, ..., u_n\}\}$ on u_i són vectors en $\vec{A}$.

Ús de coordenades: considerem A, A' dos espais afins, $f \in \mathcal{A}\!f\!f(A; A')$ i dues referències $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ de A i $\{x'_j\}_{j=0,\ldots,p}$ de A'. Prenem $e_i = \overrightarrow{x_0x_i}$ i $e'_j = \overrightarrow{x'_0x'_j}$, i la matriu associada amb $\vec{f}$:

$$M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

Sabem que $f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) = f(x_0) + \vec{f}(\sum_i \lambda_i e_i)$, on $x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Podem escriure $\overrightarrow{x'_0f(x_0)} = \sum_j a_j e'_j$, d'on podem deduïr que $\lambda'_j = a_j + \sum_k \alpha_{jk}\lambda_k$, i per tant $f(x) = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_p)$.

També ho podem expressar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_p \end{pmatrix} = M(f) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{on} \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

Definició 2.6 (Varietat afí)**.** *Sigui A un espai afí modelat en E i $V \subset A$ no buit, diem que V és una varietat afí si existeixen $a \in A$ i un subespai $F \subset E$ tals que $V = a + F$.*

D'aquesta definició podem extreure un parell de conclusions trivials:

1. V és un espai afí modelat en F.

2. La inclusió $V \hookrightarrow A$ és una afinitat, i la seva aplicació lineal associada és la inclusió $F \hookrightarrow E$

3 Hiperplans

En aquesta secció es presenten resultats indispensables per definir l'embolcall vectorial d'un espai afí, trobats a [1, 5, 6].

Anomenarem hiperplans els subespais vectorials de codimensió 1, on hi distingirem els hiperplans vectorials (aquells que passen pel 0), i els hiperplans propis (que no passen pel 0).

Lema 3.1. *Sigui E un espai vectorial, i $H \subset E$ un hiperplà propi. Si $p \in H$ tenim*

$$E = \langle p \rangle \oplus \vec{H}$$

Una caracterització molt útil dels hiperplans és a través de formes lineals.

Proposició 3.1. *Sigui E un espai vectorial. Si $w \colon E \longrightarrow K$ és una forma lineal no nul·la, aleshores $H = w^{-1}(1)$ és un hiperplà propi de E. D'altra banda, donat un hiperplà propi $H \subset E$, existeix una única forma lineal no nul·la $w \colon E \longrightarrow K$ tal que $H = w^{-1}(1)$.*

Demostració. Demostrarem el segon resultat: prenem $p \in H$, sabem que $E = \langle p \rangle \oplus \vec{H}$. Definim

$$\begin{aligned} w \colon E = \langle p \rangle \oplus \vec{H} &\longrightarrow K \\ cp + v &\longmapsto c \end{aligned}$$

Per tant $w^{-1}(1)$ correspon als punts de la forma $p + v \in H$.

Observem que si prenem una altra descomposició $\langle p' \rangle \oplus \vec{H}$ obtenim la mateixa forma lineal, ja que $cp + v = cp' + (c(p - p') + v)$. $\square$

Una aplicació molt interessant d'aquesta forma lineal w, que anomenarem funció pes de l'hiperplà, és una descomposició alternativa de E, que utilitzarem més endavant.

Lema 3.2. *Sigui E un espai vectorial, $H \subset E$ un hiperplà propi. Si $x \in E$ sabem que $x \in \vec{H}$ o bé $x = \lambda p$ amb $\lambda \neq 0$ i $p \in H$. En altres paraules, tenim la descomposició*

$$E = \vec{H} \sqcup (K^* \times H),$$

on $K^* = K \setminus \{0\}$.

Demostració. En el que segueix es farà el següent abús de notació: donats $\lambda \in K^*$ i $x \in H$, es denotarà per λx el parell $(\lambda, x) \in K^* \times H$.

Sigui $w \colon E \longrightarrow K$ la forma lineal associada amb H, $x \in E$.

- Si $w(x) = 0$ sabem que $x \in \vec{H}$.
- Altrament, $x = w(x)\frac{x}{w(x)}$. Com que $w\left(\frac{x}{w(x)}\right) = 1$, tenim $\frac{x}{w(x)} \in H$ i $w(x)\frac{x}{w(x)} \in K^* \times H$.

$\square$

Hem vist per tant que els hiperplans ens permeten fer descomposicions d'un espai vectorial. A la següent secció veurem la importància d'aquestes descomposicions a l'hora de definir l'embolcall vectorial. A més d'això, ens donen informació respecte les aplicacions lineals, com veurem en els següents dos resultats:

Lema 3.3. *Considerem una aplicació lineal $T \colon E \longrightarrow F$ entre espais vectorials, i un subespai afí $H \subset E$. L'aplicació T està determinada per la seva restricció $T|_H$ a H si i només si $H = E$ o H és un hiperplà propi.*

Demostració. Sabem que una aplicació lineal T està determinada per la seva restricció a un sistema de generadors de l'espai de sortida. En aquest cas, H és un hiperplà propi $\Leftrightarrow \langle H \rangle = \langle p \rangle \oplus \vec{H} = E$ pel lema 3.1. $\square$

Proposició 3.2. *Sigui $H \subset E$ un hiperplà propi d'un espai vectorial, $w\colon E \longrightarrow K$ la seva funció pes i $h\colon H \longrightarrow F$ una aplicació afí en un altre espai vectorial. Existeix una única aplicació lineal $\bar{h}\colon E \longrightarrow F$ extenent h i està definida per:*

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} \vec{h}(x) & si\ w(x) = 0 \\ w(x)h\left(\frac{x}{w(x)}\right) & si\ w(x) \neq 0 \end{cases}$$

Demostració. La unicitat de la extensió és conseqüència del lema anterior. A més, $\bar{h}$ és clarament una prolongació i satisfà $\bar{h}(\lambda x) = \lambda(\bar{h}(x))$. Vegem que és additiva, és a dir, que $\bar{h}(x+y) = \bar{h}(x) + \bar{h}(y)$.

Considerem la descomposició donada al lema 3.2 i prenem $x = \lambda p + \vec{u}$, $y = \mu p + \vec{v}$. Aleshores:

$$\bar{h}((\lambda p + \vec{u}) + (\mu p + \vec{v})) = (\lambda + \mu)h(p) + \vec{h}(\vec{u} + \vec{v})$$

Per altra banda:

$$\bar{h}(x) = \lambda h\left(p + \frac{\vec{u}}{\lambda}\right) = \lambda\left(h(p) + \vec{h}\left(\frac{\vec{u}}{\lambda}\right)\right) = \lambda h(p) + \vec{h}(\vec{u})$$
$$\bar{h}(y) = \mu h\left(p + \frac{\vec{v}}{\mu}\right) = \mu\left(h(p) + \vec{h}\left(\frac{\vec{v}}{\mu}\right)\right) = \mu h(p) + \vec{h}(\vec{v})$$

I per tant $\bar{h}(x) + \bar{h}(y) = \bar{h}(x+y)$, on s'ha considerat $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \lambda + \mu \neq 0$. Estudiem per tant els casos restants:

1. Si $\lambda = 0$, aleshores $x = \vec{u}$ i $y = \mu p + \vec{v}$, i per tant:

   $$\bar{h}((\lambda p + \vec{u}) + (\mu p + \vec{v})) = \mu h(p) + \vec{h}(\vec{u} + \vec{v}) = \mu h(p) + \vec{h}(\vec{v}) + \vec{h}(\vec{u})$$

   Per altra banda:

   $$\bar{h}(x) = \vec{h}(x)$$
   $$\bar{h}(y) = \mu h\left(p + \frac{\vec{v}}{\mu}\right) = \mu\left(h(p) + \vec{h}\left(\frac{\vec{v}}{\mu}\right)\right) = \mu h(p) + \vec{h}(\vec{v})$$

   Per tant $\bar{h}(x+y) = \bar{h}(x) + \bar{h}(y)$. Anàlogament per $\mu = 0$.

2. Si $\lambda + \mu = 0$, aleshores tenim $x = \lambda p + \vec{u}$ i $y = -\lambda p + \vec{v}$. Aleshores:

   $$\bar{h}(x+y) = \vec{h}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{h}(\vec{u}) + \vec{h}(\vec{v})$$

   Per altra banda, com hem vist abans:

   $$\bar{h}(x) + \bar{h}(y) = \lambda h(p) + \vec{h}(\vec{u}) - \lambda h(p) + \vec{h}(\vec{v}) = \vec{h}(\vec{u}) + \vec{h}(\vec{v})$$

   I per tant $\bar{h}(x+y) = \bar{h}(x) + \bar{h}(y)$.

$\square$

Donat un hiperplà H podem considerar els seus subespais complementaris dins E, que formen el següent conjunt:

$$E_H = \{W \mid W \text{ és un subespai complementari a } H \text{ dins } E\}.$$

Un cop definit aquest conjunt podem demostrar el següent:

Proposició 3.3. *El conjunt E_H té estructura afí, i el seu espai director és $\vec{E}_H = \mathcal{L}(E/H; H)$.*

Demostració. Observem que, com que H és un hiperplà, $\dim E/H = 1$ i per tant $\dim \vec{E}_H = \dim H = \dim E - 1$.

Definim l'estructura afí mitjançant l'aplicació $\Theta\colon E_H \times E_H \longrightarrow \mathcal{L}(E/H; H)$. Vegem-ho:

Considerem $W, W' \in E_H$, $\alpha \in E/H$. Si anomenem $\pi\colon E \longrightarrow E/H$ la projecció canònica, aleshores $\pi^{-1}(\alpha)$ és un hiperplà afí de E. A més, sabem que π, restringida a un subespai complementari a H és un isomorfisme, per tant podem definir Θ de la següent manera:

$$\Theta(W, W')(\alpha) = \left(\pi|_{W'}\right)^{-1}(\alpha) - \left(\pi|_{W}\right)^{-1}(\alpha) \in H$$

És inmediat veure que aquesta aplicació compleix els axiomes de la proposició 2.1. $\square$

4 Embolcall vectorial

L'objectiu d'aquesta secció és mostrar com un espai afí es pot inserir de manera canònica com a hiperplà d'un espai vectorial. La construcció d'aquest espai vectorial, com veurem més endavant, ha estat presentada de formes diferents segons els autors. En aquesta secció es seguirà la construcció feta per Berger i Frenkel a [1, 4], i es presentaran diverses situacions on l'embolcall vectorial serà de gran utilitat com, per exemple, l'estudi de les afinitats i les varietats afins.

4.1 Construcció de l'embolcall vectorial

Definició 4.1 (Camp vectorial)**.** *Un camp vectorial a un espai afí A és una aplicació*

$$f\colon A \longrightarrow \vec{A}$$

El conjunt dels camps vectorials en A té estructura d'espai vectorial, i el notarem per $\mathcal{V}(A)$.

Estudiarem els següents camps vectorials:

1. El *camp constant* f_ξ, amb $\xi \in \vec{A}$, que està definit per $f_\xi(x) = \xi$ per a tot $x \in A$. El conjunt de tots els camps constants és el següent:

$$\mathcal{C}(A) = \{f_\xi \mid \xi \in \vec{A}\}$$

2. El *camp central* $f_{(k,p)}$ amb $(k,p) \in K^* \times A$ està definit per $f_{(k,p)}(x) = k\overrightarrow{xp}$ per a tot $x \in A$. El conjunt de tots els camps centrals és el següent:

$$\mathcal{C}'(A) = \{f_{(k,p)} \mid (k,p) \in K^* \times A\}$$

Les propietats que s'enuncien a continuació fan que aquests dos subconjunts de $\mathcal{V}(A)$ siguin de gran importància per definir el concepte d'embolcall vectorial.

1. En primer lloc, observem que $\xi \longmapsto f_\xi$ és un isomorfisme lineal entre $\vec{A}$ i $\mathcal{C}(A)$, que té per tant estructura de subespai vectorial dins $\mathcal{V}(A)$.
2. Anàlogament, $(k,p) \longmapsto f_{(k,p)}$ és una bijecció entre $K^* \times A$ i $\mathcal{C}'(A)$.
3. A més, veiem que com a elements de $\mathcal{V}(A)$, $\lambda f_{(k,p)}$ i $f_{(\lambda k,p)}$ són idèntics, i que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}'(A) = \varnothing$.

Aquestes propietats ens permeten demostrar el següent teorema, que és de gran importància.

Teorema 4.1. *La unió $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}'(A)$ és un subespai vectorial de $\mathcal{V}(A)$. L'aplicació*

$$\phi\colon \mathcal{D}(A) \longrightarrow K \quad \textit{definida per} \quad \begin{cases} \phi(f_{(k,p)}) = k & \textit{si } (k,p) \in K^* \times A \\ \phi(f_\xi) = 0 & \textit{si } \xi \in \vec{A} \end{cases}$$

és una forma lineal en $\mathcal{D}(A)$.

L'aplicació $x \longmapsto f_{(1,x)}$ de A en $\mathcal{D}(A)$ indueix un isomorfisme afí entre A i l'hiperplà afí $\phi^{-1}(1)$ de $\mathcal{D}(A)$.

Demostració. Provem en primer lloc que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}'(A)$ és un subespai vectorial. El camp vectorial $f_{(k,p)} + f_{(k',p')}$ envia x a $k\overrightarrow{xp} + k'\overrightarrow{xp'}$. Per tant, si $k + k' = 0$ tenim $k\overrightarrow{xp} + k'\overrightarrow{xp'} = k(\overrightarrow{xp} - \overrightarrow{xp'}) = k\overrightarrow{p'p}$ i $f_{(k,p)} + f_{(k',p')} = f_{k\overrightarrow{p'p}} \in \mathcal{D}(A)$. Per altra banda, si $k + k' \neq 0$:

$$\begin{gathered}
k\overrightarrow{xp} + k'\overrightarrow{xp'} = a \;\Rightarrow\; kp - kx + k'p' - k'x = a \\
kp + k'p' - (k + k')x = a \;\Rightarrow\; kp + k'p' = a + (k + k')x \\
\frac{k}{k + k'}p + \frac{k'}{k + k'}p' = \frac{1}{k + k'}a + x
\end{gathered}$$

Restant $\frac{k'}{k+k'}p$ als dos termes obtenim el següent:

$$\frac{k'}{k + k'}\overrightarrow{pp'} = \frac{1}{k + k'}a + x - p = \overrightarrow{pb}\,,$$

on hem considerat $b = \frac{1}{k+k'}a + x = b$. Operant la combinació lineal inicial amb aquest b obtenim el següent:

$$\begin{gathered}
k\overrightarrow{xp} + k'\overrightarrow{xp'} = -x(k + k') + kp + k'p' = \\
= -x(k + k') + b(k + k') = (k + k')\overrightarrow{xb} = (k + k')\overrightarrow{xb}
\end{gathered}$$

Per tant $f_{(k,p)} + f_{(k',p')} = f_{(k+k',b)} \in \mathcal{D}(A)$.

De forma similar:

$$\begin{gathered}
k\overrightarrow{xp} + \vec{\xi} = a \longrightarrow kp - kx + \vec{\xi} = a \Rightarrow \\
\Rightarrow p - x + k^{-1}\vec{\xi} = k^{-1}a \longrightarrow k^{-1}\vec{\xi} = \overrightarrow{pp'}\,,
\end{gathered}$$

on hem considerat $p' = k^{-1}a + x$, i hem utilitzat que $k \in K^*$. Operant la combinació lineal inicial amb aquest p' tenim el següent:

$$k\overrightarrow{xp} + \vec{\xi} = kp - kx + \vec{\xi} = kp - kx + k\overrightarrow{pp'} = k\overrightarrow{xp'}$$

Per tant $f_{(k,p)} + f_{\vec{\xi}} = f_{(k,p')} \in \mathcal{D}(A)$, i tenim que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}'(A)$ és un subespai vectorial. A més, la linealitat de ϕ també es segueix d'aquests càlculs.

Per provar que $\Sigma\colon x \longmapsto f_{(1,x)}$ és un morfisme afí fixem $p \in A$. Sabem que Σ és afí si i només si existeix una aplicació lineal $\vec{\Sigma}\colon \vec{A} \longrightarrow \mathcal{C}(A)$ tal que $\overrightarrow{\Sigma(p)\Sigma(b)} = \vec{\Sigma}(b) - \vec{\Sigma}(p)$ (com a vectors de $\mathcal{D}(A)$). Per definició, $\overrightarrow{\Sigma(p)\Sigma(b)} = \Sigma(b) - \Sigma(p)$ envia x a $\overrightarrow{xb} - \overrightarrow{xp} = \overrightarrow{pb}$, i per tant $\overrightarrow{\Sigma(b)\Sigma(p)} = f_{\overrightarrow{pb}}$, i l'aplicació lineal $\vec{\Sigma}$ donada per $\vec{\Sigma}(\vec{\xi}) = f_{\vec{\xi}}$ compleix la condició desitjada. $\square$

Corol·lari 4.1. *Sigui $(A, \vec{A})$ un espai afí, i $\widehat{A} = \vec{A} \sqcup (K^* \times A)$. Identifiquem A amb $1 \times A \subset \widehat{A}$. Aleshores $\widehat{A}$ és un K-espai vectorial amb les operacions següents:*

1. *Suma: considerem $x, x' \in A$, $k, k' \in K^*$, $\vec{h}, \vec{h'} \in \vec{A}$. Tenim els següents casos:*

   (a) Si $k + k' = 0$, $kx + k'x' = k\overrightarrow{xx'}$

   (b) Si $k + k' \neq 0$ aleshores $kx + k'x' = (k + k')x''$, on x'' és l'únic element de A definit per

   $$x'' = x + \frac{k'}{k + k'}\overrightarrow{xx'}$$

   on el signe $+$ del segon membre indica l'operació de $\vec{A}$ dins A.

(c) $kx + \vec{h} = k\left(x + \frac{1}{k}\vec{h}\right)$, *on el signe + del segon membre té el mateix significat que en (b).*

(d) $\vec{h} + \vec{h'}$ *és la mateixa operació sobre* $\vec{A}$

2. *Producte per escalars: l'aplicació de* $K \times \widehat{A}$ *dins* $\widehat{A}$ *està definida per les operacions següents, en les quals considerem* $\lambda \in K$, $k \in K^*$, $\vec{h} \in \vec{A}$, $x \in A$.

$$\begin{cases} (\lambda, \vec{h}) \longmapsto \lambda\vec{h} \\ (\lambda, kx) \longmapsto (\lambda k)x \\ (0, kx) \longmapsto 0 \in \vec{A} \end{cases}$$

L'aplicació $M\colon \widehat{A} \longrightarrow A$ *definida per* $M(kx) = k$, $M(\vec{\xi}) = 0$ *per a* $\vec{\xi} \in \vec{A}$ *és una forma lineal en* $\widehat{A}$ *de nucli* $\vec{A}$, *i:*

$$\{\xi \in \widehat{A} \mid M(\xi) = 1\}$$

és un hiperplà afí A *de* $\widehat{A}$ *que no passa per l'origen de* $\widehat{A}$.

Per acabar, per tot $a \in A$ *tenim que* $\widehat{A} = \vec{A} \oplus Ka$, *i la restricció a* $A \subset \widehat{A}$ *de la projecció* Λ_a *de* $\widehat{A}$ *en el primer factor* $\vec{A}$ *és la bijecció* $\Theta_a\colon x \longmapsto \overrightarrow{ax}$ *definida a la proposició 2.1.*

Demostració. Només provarem l'última part, ja que la resta és una conseqüència directa del teorema anterior.

Com que suposem A i $\vec{A}$ disjunts, $a \notin \vec{A}$ i per tant $\vec{A} \cap Ka = 0$, i com que $\vec{A} = \text{Ker } M$ és un hiperplà vectorial de $\widehat{A}$, aleshores $\widehat{A} = \vec{A} \oplus Ka$.

Considerem ara $\vec{h} \in \vec{A}$, $x \in A$, $k \in K^*$, tenim:

$$\begin{cases} \vec{h} = \vec{h} \\ kx = k(a + \overrightarrow{ax}) = k\overrightarrow{ax} + ka \end{cases}$$

de manera que:

$$\begin{cases} \Lambda_a(\vec{h}) = \vec{h} \\ \Lambda_a(kx) = k\overrightarrow{ax} \end{cases}$$

i per $k = 1$ acaba la demostració. □

Hem vist, per tant, que podem trobar un espai vectorial $\widehat{A}$ de manera que A n'és un hiperplà afí, ja que és l'antiimatge de 1 per una forma lineal, que anomenarem funció pes. Direm que aquest espai vectorial és l'embolcall vectorial de A.

4.2 Referències de A i bases de $\widehat{A}$

Com que sabem que $\widehat{A}$ és un espai vectorial, és natural buscar-ne una base. La propietat principal de l'embolcall vectorial és que l'espai afí n'és un hiperplà, i aquest fet permet relacionar les referències afins d'un espai afí A amb les bases del seu embolcall vectorial, tal i com descriu el següent lema de [5].

Lema 4.1. *Sigui* A *un espai afí. Per qualsevol referència* $\{a_0, \{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}\}\}$ *de* A, *la família* $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}, a_0\}$ *és una base de l'embolcall vectorial* $\widehat{A}$, *i per qualsevol referència afí* $\{a_0, ..., a_m\}$ *de* A, *la família* $\{a_0, ..., a_m\}$ *és una base de* $\widehat{A}$.

Demostració. Comencem veient que $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}, a_0\}$ és una base de $\widehat{A}$. Suposem que tenim una combinació lineal

$$\lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + \lambda_m\overrightarrow{a_0a_m} + \mu a_0 = 0$$

en $\widehat{A}$. Si $\mu \neq 0$, aleshores tenim

$$\begin{gathered}\lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + \lambda_m\overrightarrow{a_0a_m} + \mu a_0 = 0 \Rightarrow \\ \mu^{-1}\lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + \mu^{-1}\lambda_m\overrightarrow{a_0a_m} + a_0 = 0,\end{gathered}$$

fet que mai es compleix. Tenim per tant que $\mu = 0$, però com que $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}\}$ és una base de $\vec{A}$, aleshores tenim $\lambda_i = 0$ per tot $1 \leq i \leq m$. Per tant, $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}, a_0\}$ és una base de $\widehat{A}$.

Vegem la segona implicació: Considerem ara la combinació lineal

$$\lambda_0a_0 + ... + \lambda_ma_m = 0$$

a $\widehat{A}$. Volem veure que $\lambda_i = 0$ per tot i. Sumant els dos primers elements tenim que:

$$\lambda_0a_0 + \lambda_1a_1 = (\lambda_0 + \lambda_1)(a_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\overrightarrow{a_0a_1}) = (\lambda_0 + \lambda_1)a_0 + \lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} = \widetilde{\lambda_0}a_0 + \lambda_1a_1$$

Sumant el tercer element tenim que:

$$\begin{gathered}\widetilde{\lambda_0}a_0 + \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 = \widetilde{\lambda_0}a_0 + \lambda_2a_2 + \lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} = \\ = (\widetilde{\lambda_0} + \lambda_2)(a_0 + \frac{\lambda_2}{\widetilde{\lambda_0} + \lambda_2}\overrightarrow{a_0a_2}) = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)a_0 + \lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_0a_2}\end{gathered}$$

Podem veure per tant que la combinació lineal és

$$\lambda_0a_0 + ... + \lambda_ma_m = (\lambda_0 + ... + \lambda_m)a_0 + \lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + \lambda_m\overrightarrow{a_0a_m} = 0$$

que, com hem vist al cas anterior, ens dóna $\lambda_i = 0$ per tot $1 \leq i \leq m$. □

A la figura 1 podem observar la base $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, a_0\}$ de $\widehat{A}$, mentre que a la figura 2 podem veure la base $\{a_0, a_1, a_2\}$. En ambdues es denota amb $\widehat{0}$ el centre de l'embolcall vectorial.

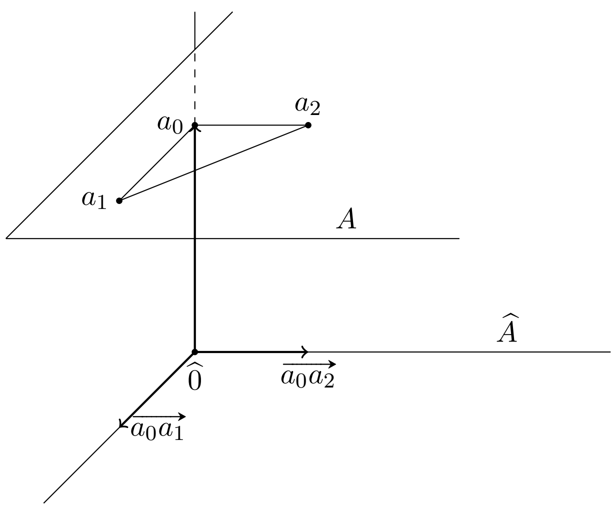


Figura 1: Base $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, a_0\}$ de $\widehat{A}$.

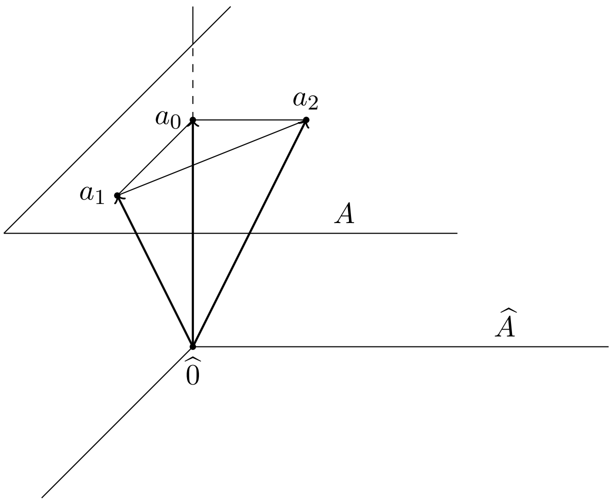


Figura 2: Base $\{a_0, a_1, a_2\}$ de $\widehat{A}$.

Estudiem ara com canvien les coordenades al veure els elements de A (o del seu espai director $\vec{A}$) com elements de $\widehat{A}$.

Sigui $x \in \widehat{A}$ un element amb pes λ, si

$$x = a_0 + x_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + x_m\overrightarrow{a_0a_m}$$

sobre la referència afí $\{a_0, \{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}\}\}$ de A, aleshores les coordenades de x sobre la base $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}, a_0\}$ de $\widehat{A}$ són

$$(\lambda x_1, ..., \lambda x_m, \lambda).$$

Podem observar, per tant, que els punts de A (és a dir, aquells que tenen pes 1) tenen última coordenada 1 quan els mirem a $\widehat{A}$.

Per a qualsevol vector $v \in \vec{A}$, si

$$v = v_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + v_m\overrightarrow{a_0a_m}$$

sobre la base $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}\}$ de $\vec{A}$, aleshores sobre la base $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}, a_0\}$ de $\widehat{A}$, les coordenades de v són

$$(v_1, ..., v_m, 0)$$

En aquesta base de $\widehat{A}$, per tant, els vectors de $\vec{A}$ tenen última coordenada 0.

Si un vector $v \in \vec{A}$ s'expressa com

$$v = v_1\overrightarrow{a_0a_1} + ... + v_m\overrightarrow{a_0a_m} = -(v_1 + ... + v_m)a_0 + v_1a_1 + ... + v_ma_m,$$

respecte a la base $\{a_0, ..., a_m\}$ de A, aleshores les seves coordenades respecte la base $\{a_0, ..., a_m\}$ de $\widehat{A}$ són

$$(-(v_1 + ... + v_m), v_1, ..., v_m).$$

4.3 Morfismes i l'embolcall vectorial

Ara que hem vist l'existència de l'embolcall vectorial $\widehat{A}$ per a qualsevol espai afí A, volem veure la relació entre les afinitats entre espais afins (és a dir, els elements de $\mathcal{Aff}(A; A')$) i les aplicacions lineals entre els seus respectius embolcalls vectorials (és a dir, els elements de $\mathcal{L}(\widehat{A}; \widehat{A'})$) essent A i A' dos espais afins.

Proposició 4.1. *Considerem A, A' dos espais afins i $f \in \mathcal{A}\!f\!f(A; A')$. Definim $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A'}$ amb $f|_{\vec{A}} = \vec{f}$, $\widehat{f}(kx) = kf(x)$ (utilitzant les identificacions $A \subset \widehat{A}$, $A' \subset \widehat{A'}$). Amb aquesta definició tenim $\widehat{f} \in \mathcal{L}(\widehat{A}; \widehat{A'})$.* □

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & A' \arrow[d, hook] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{A'} \end{tikzcd}$$

Anomenarem a $\widehat{f}$ la prolongació lineal de f. Per definició, a més, sabem que és única. Aquesta definició és la donada per Berger a [1], però Frenkel [4, p. 53] en presenta un enfocament diferent:

Teorema 4.2. *Per tal que una aplicació $f : A \longrightarrow A'$ sigui afí és necessari i suficient que sigui la restricció a A d'una aplicació lineal $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A'}$.* □

Aquest teorema defineix de manera implícita la prolongació lineal d'una afinitat f. En el cas que A' sigui un espai vectorial, podem definir de la mateixa manera una aplicació lineal $f^* \in \mathcal{L}(\widehat{A}, A')$. De l'existència d'aquesta aplicació podem deduïr que, per tot espai afí A sobre un cos K, existeix un parell $(\widehat{A}, i)$ únic llevat d'isomorfismes, amb $\widehat{A}$ un espai vectorial i i una injecció afí $A \longrightarrow \widehat{A}$ que és solució del problema universal que veurem en detall a la secció 7.

la prolongació lineal té un bon comportament respecte la composició d'aplicacions:

Proposició 4.2. *La prolongació lineal satisfà $\widehat{\mathrm{Id}_A} = \mathrm{Id}_{\widehat{A}}$ i, si $g \in \mathcal{A}\!f\!f(A', A'')$, $f \in \mathcal{A}\!f\!f(A, A')$, on A, A', A'' són espais afins, es té que $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.*

Demostració. La unicitat de la prolongació lineal s'usa per demostrar els dos enunciats. Considerem $kx \in \widehat{A}$.

Per una banda tenim que

$$\mathrm{Id}_{\widehat{A}}(kx) = kx, \qquad \widehat{\mathrm{Id}_A}(kx) = k\mathrm{Id}_{\widehat{A}}(x) = kx$$

i per tant $\mathrm{Id}_{\widehat{A}} = \widehat{\mathrm{Id}_A}$. Per altra banda,

$$(\widehat{g} \circ \widehat{f})(kx) = \widehat{g}(\widehat{f}(kx)) = 1 \cdot g(\widehat{f}(kx)) = g(kf(x)) = kg(f(x))$$

$$(\widehat{g \circ f})(kx) = k(g \circ f)(x) = kg(f(x))$$

i per tant $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$. □

Tenim per tant el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & A' \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & A'' \arrow[d, hook] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{A'} \arrow[r, "\widehat{g}"] & \widehat{A''} \end{tikzcd}$$

La prolongació lineal és una eina molt útil per estudiar les propietats d'una afinitat:

Proposició 4.3. *Una afinitat és injectiva (o exhaustiva) si i només si la seva prolongació lineal també ho és. En particular, f es un és un isomorfisme afí si i només si $\widehat{f}$ és un isomorfisme lineal.*

Demostració. Considerem una afinitat $f\colon A \longrightarrow A'$. Per una banda, sabem que si f és injectiva aleshores existeix una inversa per l'esquerra, és a dir, una aplicació $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Aleshores, per la proposició anterior tenim que $\widehat{g} \circ \widehat{f} = \mathrm{Id}_{\widehat{A}}$ i per tant $\widehat{f}$ té una inversa per l'esquerra i és, per tant, injectiva.

De forma similar, f és exhaustiva si té una inversa per la dreta, és a dir, una aplicació $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. La prova segueix de manera anàloga.

Els enunciats recíprocs són quasi inmediats: si $\widehat{f}$ és injectiva, aleshores la seva restricció f també ho és, i si $\widehat{f}$ és exhaustiva, com que preserva la funció pes, aleshores f també és exhaustiva. □

Aquesta proposició ens resulta una eina molt útil per identificar embolcalls vectorials en algunes situacions. Si A és una varietat afí d'un espai afí B, aleshores el seu embolcall vectorial serà un subespai vectorial de $\widehat{B}$.

Analitzem ara les coordenades de les extensions lineals. Considerem una afinitat f entre dos espais afins A, A' de dimensió finita amb referències $\{a_0, u_1, ..., u_n\}$ i $\{b_0, v_1, ..., v_n\}$ respectivament. Pel lema 4.1, sabem que $\widehat{A}$ i $\widehat{A'}$ tenen bases $\{u_1, ..., u_n, a_0\}$ i $\{v_1, ..., v_m, b_0\}$ respectivament. Aleshores, respecte aquestes dues bases, una aplicació lineal $h : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A'}$ ve donada per una matriu $M_{(m+1)\times(n+1)}$. Considerem que aquesta aplicació lineal h és igual a la prolongació lineal $\widehat{f}$. Sabem que

$$\widehat{f}(u + \lambda a) = \vec{f}(u) + \lambda f(a),$$

i com que, en la base $\{u_1, ..., u_n, a_0\}$ de $\widehat{A}$ els punts de A es representen mitjançant vectors amb última coordenada igual a 1, i els vectors de $\vec{A}$ amb vectors amb última coordenada igual a 0, sabem que es compleixen les següents propietats:

1. L'última fila de la matriu $M = M(\widehat{f})$ respecte a les bases donades és

$$(\underbrace{0, ..., 0}_{m}, 1)$$

   amb m zeros.

2. L'última columna de M conté les coordenades

$$(\mu_1, ..., \mu_m, 1)$$

   de $f(a_0)$ respecte la base $\{v_1, ..., v_m, b_0\}$.

3. La submatriu de M obtinguda eliminant l'última fila i l'ultima columna és la matriu de l'aplicació lineal $\vec{f}$ respecte les bases $\{u_1, ..., u_n\}$ i $\{v_1, ..., v_m\}$.

Per exemple, considerem la següent afinitat $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ definida de la següent manera:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + bx_2 + \mu_1 \\ y_2 &= cx_1 + dx_2 + \mu_2 \end{aligned}$$

La matriu de $\widehat{f}$ és

$$\begin{pmatrix} a & b & \mu_1 \\ d & e & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tenim

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \mu_1 \\ c & d & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\widehat{A}$, tenim

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \mu_1 \\ c & d & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Podem veure, per tant, que l'aplicació $\widehat{f}$ s'obté a partir de f afegint la "variable d'homogeneïtat" x_3:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + bx_2 + \mu_1 x_3 \\ y_2 &= cx_1 + dx_2 + \mu_2 x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

4.4 Baricentres

Incrustar un espai afí A en un espai vectorial $\widehat{A}$ ens permet formar combinacions lineals. Considerem una família de punts $\{x_i\}_{i\in I}$ i $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ una família de coeficients tals que $\lambda_i = 0$ llevat d'un nombre finit de subíndexs i. Aleshores $\sum_i \lambda_i x_i$ està ben definit i és un element de $\widehat{A}$. Hi ha dues possibilitats:

1. $\sum_i \lambda_i x_i \neq 0$. Aleshores existeix un element $x \in A$ tal que

$$\sum_i \lambda_i x_i = \left(\sum_i \lambda_i\right) x$$

2. $\sum_i \lambda_i x_i = 0$. Aleshores $\sum_i \lambda_i x_i \in \vec{A}$

Això ens condueix a la següent definició:

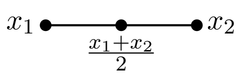
Definició 4.2. *Sigui $\{x_i\}_{i\in I}$ una família de punts d'un espai afí A, i $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ una família d'escalars tal que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. El baricentre dels punts x_i amb masses (o pesos) λ_i és el punt $x \in A$ donat per:*

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

Vegem-ne dos exemples rellevants. Si $\lambda_1 = 1, \lambda_i = 0$ per $i \neq 1$ aleshores $x = x_1$. Si $I = \{1, 2\}$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ (per la qual cosa cal que la característica de K sigui diferent de 2), aleshores

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

i aquest punt s'anomena punt mitjà de x_1 *i* x_2.



Més generalment, si $I = \{1, ..., n\}$ i $\lambda_i = \frac{1}{n}$ per tot $1 \leqslant i \leqslant n$ (per $n \neq 0$ en K), el punt

$$x = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

s'anomena equibaricentre dels x_i.

Observem que si A és un pla afí euclidià, l'equibaricentre del triangle format pels punts x_1, x_2, x_3 coincideix amb el centre de massa (en el sentit de la mecànica) de la placa triangular formada per l'embolcall convex d'aquests tres punts. Aquest fet no és cert, però, si considerem l'equibaricentre de quatre punts i el centre de masses de la placa homogènia formada per aquests [1, p. 77].

Un altre cas fonamental es dóna quan $K = \mathbb{R}$, A és un espai afí real i $x, y \in A$. El segment amb extrems en x, y és el subconjunt

$$\langle x, y\rangle = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} \subset A,$$

que és un element fonamental en la definició del concepte de convexitat.

Definició 4.3 (Massa puntual)**.** *Un element de $\widehat{A} = \vec{A} \cup (K^* \times A)$ s'anomena massa puntual, i s'escriu (λ, x), on $x \in \vec{A}$ si $\lambda = 0$ i $x \in A$ si $\lambda \neq 0$. Una massa puntual (λ, x) és, de fet, el punt x amb pes λ.*

L'associativitat de la suma en $\widehat{A}$ té diverses conseqüències pels baricentres, donant a lloc a propietats amb interessants implicacions geomètriques.

Proposició 4.4 (Associativitat de baricentres de masses puntuals)**.** *Sigui I un conjunt finit, $I = I_1 \cup ... \cup I_p$ una partició de I, i $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i \in I}$ una família de masses puntuals. El baricentre d'aquesta família coincideix amb el baricentre de $\{(\mu_l, \eta_l)\}_{l=1,...,p}$ on, per a cada l, la massa puntual (μ_l, η_l) és el baricentre de $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i \in I_l}$.* □

Proposició 4.5 (No associativitat de baricentres en A)**.** *Sigui I un conjunt finit, $I = I_1 \cup ... \cup I_p$ una partició de I, $\{x_i\}_{i \in I}$ una família de punts de A i $\{\lambda_i\}_{i \in I_l}$ famílies d'escalars tals que $\sum_i \lambda_{i \in I_l} = 1$ per tot $l = 1, ..., p$.*

Siguin $\alpha_1, ..., \alpha_p \in K$ tals que $\sum_l \alpha_l = 1$. Si η_l és el baricentre dels x_i amb masses λ_i (amb $i \in I_l$) i η és el baricentre dels η_l (amb $l = 1, ..., p$) amb masses α_l, aleshores η és el baricentre dels x_i (amb $i \in I$) amb masses $\alpha_l \lambda_i$ (amb $i \in I_l$). □

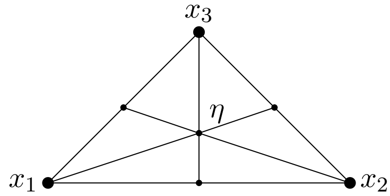
A continuació mostrem una conseqüència geomètrica ben coneguda. Comencem amb tres punts x_1, x_2, x_3 de A, i considerem la partició $I = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\}$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$ (en aquest cas particular considerarem la característica de K diferent de 2 o 3).

Aleshores $\eta_1 = x_1$, i $\eta_2 = \frac{x_2+x_3}{2}$ és el punt mig de $\{x_2, x_3\}$. Amb això el baricentre x de x_1, x_2, x_3 amb masses $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ és el baricentre de $x_1, \frac{x_2+x_3}{2}$ amb masses 1 i 2, respectivament.

En termes geomètrics, les tres medianes

$$\left\langle x_1, \frac{x_2 + x_3}{2}\right\rangle, \quad \left\langle x_2, \frac{x_1 + x_3}{2}\right\rangle \quad \left\langle x_3, \frac{x_1 + x_2}{2}\right\rangle$$

han de ser concurrents, i el seu punt de tall η és el baricentre del triangle $\{x_1, x_2, x_3\}$.



4.4.1 Aplicacions. Afinitats i varietats afins

Coneguts els conceptes d'embolcall vectorial i baricentre podem introduir una condició necessària i suficient per a que una aplicació sigui una afinitat.

Proposició 4.6. *Siguin A, A' dos espais afins. Una aplicació $f\colon A \longrightarrow A'$ és afí si i només si conserva baricentres, és a dir, si per tota família finita de punts $\{x_i\}_{i\in I} \subset A$ i $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset K$ tal que $\sum_i \lambda_i = 1$ es té*

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Demostració. La implicació directa és immediata, ja que si f és afí aleshores $\widehat{f}$ és lineal, i treballant a $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ obtenim que $\widehat{f}\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i \widehat{f}(x_i)$, i com que $x_i \in A$, podem canviar $\widehat{f}$ per f.

Per provar la implicació recíproca, considerem una referència $\{x_k\}_i$ de A. Sabem que això és una base a $\widehat{A}$, i per tant existeix una única aplicació $F\colon \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ que és idèntica a f a $\{x_k\}_i$ de A. A més, qualsevol punt a A és $\lambda_i x_i$ amb $\sum_i \lambda_i = 1$. Aleshores:

$$F(\lambda_i x_i) = \lambda_i F(x_i) = \lambda_i f(x_i) = f(\lambda_i x_i),$$

on hem utilitzat que f preserva baricentres. Hem vist per tant que f coincideix amb F a A. Com que F és lineal, f és afí. $\square$

També podem donar una caracterització de varietat afí.

Proposició 4.7. *Sigui A un espai afí. Un subconjunt $V \subset A$ és una varietat afí si i només si conté el baricentre de qualsevol família de punts a V, és a dir, si per tota família finita de pesos $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset K$ i punts $\{x_i\}_{i\in I} \subset S$ amb $\sum_i \lambda_i = 1$ es té*

$$\sum_i \lambda_i x_i \in S$$

Demostració. Considerem $a \in A$ $(A \neq \varnothing)$.

Sigui V una varietat afí de A, i $\{x_i\}_{i\in I}$ una família de punts a V (respectivament $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ escalars en K tals que $\lambda_i = 0$ per un nombre finit d'índex i i $\sum_i \lambda_i = 1$).

Sabem que $\Theta_a(V)$ és un subespai vectorial de $\vec{A}$, i per tant $\Theta_a(\sum_i \lambda_i x_i) = \sum_i \lambda_i \Theta_a(x_i) \in \Theta_a(V)$, i com que Θ_a és injectiva el baricentre de $\sum_i \lambda_i x_i$ pertany a V.

Suposem ara que tot baricentre de punts de V està dins V. Siguin $\vec{h}, \vec{k} \in \Theta_a(V)$, $\lambda, \mu \in K$, aleshores podem definir $\vec{h}$ i $\vec{k}$ com $\vec{h} = \overrightarrow{ax}$, $\vec{k} = \overrightarrow{ay}$, on $x, y \in A$. Volem veure que $\Theta_a(V)$ és un subespai vectorial de $\vec{A}$, per tant hem de veure que $\lambda\vec{h} + \mu\vec{k} \in \Theta_a(V)$. Vegem-ho:

$$\lambda\vec{h} + \mu\vec{k} = \lambda\overrightarrow{ax} + \mu\overrightarrow{ay} = \lambda x + \mu y - (\lambda + \mu)a = \Theta_a(z),$$

on $z = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu)a \in V$ per hipòtesi, i per tant $\Theta_a(V)$ és un subespai vectorial de $\vec{A}$ i per tant V és una varietat afí de A. $\square$

Proposició 4.8. *Sigui A un espai afí sobre un cos amb característica zero. Per a qualsevol subconjunt finit $F \subset A$ existeix un punt $x \in A$ tal que qualsevol afinitat $f\colon A \longrightarrow A$ tal que $f(F) = F$ fixa x.*

Demostració. Si $F = \{x_1, ..., x_n\}$ prenem $x = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$ i apliquem la caracterització d'afinitat vista en aquesta secció. $\square$

4.4.2 Coordenades baricèntriques

En aquesta secció treballarem en la idea d'associar una referència de A amb una base de $\widehat{A}$.

Proposició 4.9. *Sigui $\{x_i\}_{i=0,...,n}$ una referència d'un espai afí A. Per tot $x \in A$, existeix $\lambda_i \in K$, $(i = 0, ..., n)$ tal que $\sum_i \lambda_i = 1$ i $x = \sum_i \lambda_i x_i$. Els escalars λ_i estan unívocament definits i són anomenats les coordenades baricèntriques de x en la referència $\{x_i\}_{i=0,...,n}$.*

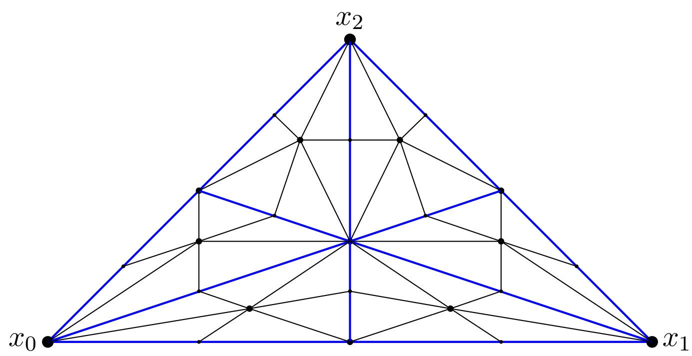
Demostració. Com a element de $\widehat{A}$, x es pot escriure de manera única com $\sum_i \lambda_i x_i$, i sabem que $\sum_i \lambda_i = 1$ perquè $x \in A \subset \widehat{A}$. □

Per exemple, si $n = 2$, els punts amb coordenada $\lambda_0 = 0$ en la referècia $\{x_0, x_1, x_2\}$ són aquells que pertanyen al costat $\langle x_1, x_2\rangle$ del triangle $\{x_0, x_1, x_2\}$. Aquesta observació és important en l'estudi de la convexitat de conjunts en un espai afí.

Subdivisió baricèntrica: La subdivisió baricèntrica d'un símplex $\{x_0, ..., x_d\}$ en un espai afí de dimensió d es defineix per inducció sobre d.

Per $d = 1$ és simplement el conjunt format pels dos símplexs $\{x_0, \frac{x_0+x_1}{2}\}$ i $\{\frac{x_0+x_1}{2}, x_1\}$. Per $d = 2$ és el conjunt dels 6 triangles que tenen un vèrtex en $\frac{x_0+x_1+x_2}{3}$ i costat oposat igual a cadascun dels símplexs de la subdivisió baricèntrica dels costats de $\{x_0, x_1, x_2\}$.

La subdivisió baricèntrica es pot fer tantes vegades com sigui necessari. En el cas de fer-la per segon cop s'obtenen $6 \cdot 6 = 36$ triangles. La següent figura representa, en blau, els triangles resultants de la primera subdivisió baricèntrica, mentre que els triangles negres representen els de la segona subdivisió baricèntrica.



5 Completació projectiva d'un espai afí

En aquesta secció es presenta una construcció molt important, com veurem més endavant, en l'estudi de corbes i superfícies en l'espai. Aquesta construcció (que es pot trobar a [4, 5]) és la completació projectiva d'un espai afí, en la que és molt útil l'embolcall vectorial. Veurem que aquesta construcció compleix una propietat universal, i també la relació entre varietats afins i projectives i afinitats i aplicacions entre completacions projectives. Començarem, però, fent una petita introducció dels espais projectius.

5.1 Espais projectius

Definim l'espai projectiu associat a un espai vectorial E com l'espai quocient de $E \setminus \{0\}$ per la relació d'equivalència

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y \quad \text{per} \quad \lambda \in K$$

Notarem l'espai projectiu com $\mathbf{P}(E)$.

La projecció canònica $p\colon E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}(E)$ és la funció que associa la classe d'equivalència $[u]$ mòdul $\sim$ amb $u \neq 0$. La dimensió de l'espai projectiu es defineix de la següent forma: si E té dimensió finita, és a dir, $\dim(E) = n$, aleshores $\dim(\mathbf{P}(E)) = n - 1$. Si la dimensió de E no és finita, aleshores $\dim(E) = \dim(\mathbf{P}(E))$.

Podem veure, per tant, que un espai projectiu $\mathbf{P}(E)$ és un conjunt de classes d'equivalència de vectors de E. L'esperit de la geometria projectiva és veure les classes $p(u) = [u]$ com a un objecte "atòmic", deixant de banda l'estructura interna de la classe d'equivalència. És per aquest motiu que s'anomenen les classes d'equivalència $a = [u]$ punts de l'espai projectiu.

Si veiem E com un espai afí, aleshores, per a qualsevol vector no nul $u \in E$, com que

$$[u] = \{\lambda u \mid \lambda \in K, \lambda \neq 0\}$$

essent

$$Ku = \{\lambda u \mid \lambda \in K\}$$

el subespai vectorial de dimensió 1 generat per u, aleshores l'aplicació

$$[u] \mapsto Ku$$

de $\mathbf{P}(E)$ en el conjunt de subespais vectorials de dimensió 1 de E és clarament una bijecció, i com que els subespais de dimensió 1 es corresponen amb les rectes que passen per l'origen de E, podem veure $\mathbf{P}(E)$ com el conjunt de rectes de E que passen per l'origen. Per tant, podem veure $\mathbf{P}(E)$ com el conjunt obtingut de E quan les rectes que passen per l'origen són tractades com a punts. És natural per tant, tenir la idea intuïtiva que la dimensió de l'espai projectiu haurà de ser la dimensió de l'espai vectorial menys 1.

L'espai projectiu d'un espai vectorial es pot visualitzar de diverses maneres. Considerem, per simplicitat, $E = \mathbb{R}^{n+1}$ (el mateix raonament s'aplica per $E = K^{n+1}$, amb K un cos qualsevol).

Sigui H l'hiperplà afí consistent en els punts $(x_1, ..., x_{n+1})$ tals que $x_{n+1} = 1$. Qualsevol vector no nul $u \in E$ determina una recta D que passa per l'origen, i que talla l'hiperplà H en un únic punt excepte en el cas en que D sigui paral·lela a l'hiperplà H. En aquest segon cas, la recta corresponent a la classe d'equivalència de u pot ser pensada com un punt a l'infinit, denotat usualment per u_∞. Aleshores, l'espai projectiu $\mathbf{P}(E)$ es pot visualitzar com el conjunt de punts de l'hiperplà H juntament amb els punts a l'infinit associats amb les rectes de l'hiperplà H_∞ d'equació $x_{n+1} = 0$. La figura 3 il·lustra aquesta representació quan $E = \mathbb{R}^3$, on u_∞ és una recta al pla XY.

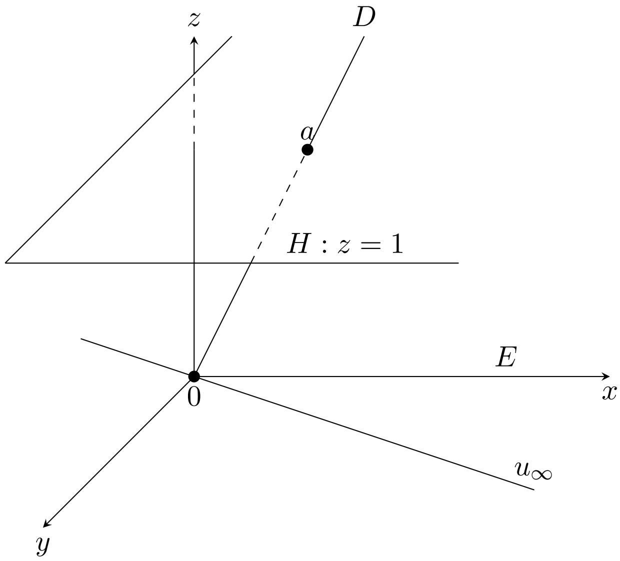


Figura 3: Visualització de l'espai projectiu de E.

5.2 Completació projectiva d'un espai afí

Donat un espai afí A amb espai vectorial associat $\vec{A}$, podem construir-ne l'embolcall vectorial $\widehat{A}$ i, finalment, l'espai projectiu $\mathbf{P}(\widehat{A})$. Aquest espai projectiu, que anomenarem $\widetilde{A}$, té propietats interessants, que explorarem a continuació. Finalment, veurem que compleix una propietat universal.

Sabem que l'espai vectorial $\widehat{A}$ és la unió disjunta d'elements $a \in A$ multiplicats per un pes $\lambda \neq 0$ i d'elements $u \in \vec{A}$. Observem que si $\sim$ és la relació d'equivalència en $\widehat{A}$ mitjançant la qual definim l'espai projectiu $\mathbf{P}(\widehat{A})$, aleshores la classe d'equivalència d'un element a amb pes λ conté el representant $a \in A$ amb pes 1, mentre que la classe $[u]$ d'un vector de $\vec{A}$ no nul és un punt de l'espai projectiu $\mathbf{P}(\vec{A})$. Per tant, tenim la bijecció

$$\mathbf{P}(\widehat{A}) \longleftrightarrow A \cup \mathbf{P}(\vec{A})$$

que ens porta al resultat següent:

Teorema 5.1. *Sigui A un espai afí i $\widehat{A}$ el seu embolcall vectorial. Aleshores:*

$$\mathbf{P}(\widehat{A}) = A \sqcup \mathbf{P}(\vec{\mathcal{A}})$$

Demostració. Recordem que A és un hiperplà de l'embolcall vectorial, ja que és l'antiimatge de 1 per una forma lineal. Considerem per tant la seva forma lineal w associada.

Un punt de l'espai projectiu és una varietat lineal de dimensió 1, és a dir, els múltiples d'un cert $x \in \widehat{A} \setminus \{0\}$. Si $w(x) = 0$ aleshores $x \in \vec{A}$ i $\langle x \rangle \in \mathbf{P}(\vec{A})$. Per altra banda, si $w(x) \neq 0$, aleshores $\frac{x}{w(x)} \in A$ i $\langle x \rangle \in k(A) \cong A$, on k és l'aplicació que, per a cada punt de l'espai afí A, retorna l'única recta que passa pel 0 i aquest punt. $\square$

Aquest resultat, per tant, ens permet veure A inmers en $\mathbf{P}(\widehat{A})$. El teorema 5.2 descriu aquesta inmersió, i en destaca els elements més importants.

Teorema 5.2. *Sigui A un espai afí inmers com un hiperplà del seu embolcall vectorial $\widehat{A}$. Aleshores A s'identifica amb un subconjunt de l'espai projectiu $\widetilde{A} = \mathbf{P}(\widehat{A})$, i el complementari corresponent és l'hiperplà $A_\infty = \mathbf{P}(\vec{A})$ de $\widetilde{A}$.*

Demostració. Sigui $x \in A$ i ξ l'única recta vectorial de $\widehat{A}$ passant per x (única perquè $0 \notin A$). L'aplicació $x \longmapsto \xi$ és una injecció de A dins $\mathbf{P}(\widehat{A}) = \widetilde{A}$, ja que si x i x' defineixen la mateixa recta, aleshores $x = \lambda x'$ amb $\lambda \in K^*$ i per tant $1 = M(x) = kM(x') = k$.

Identifiquem per aquesta injecció A amb un subconjunt de $\mathbf{P}(\widehat{A})$. □

Els punts de $\mathbf{P}(\widehat{A})$ continguts a $\mathbf{P}(\vec{A})$ són els punts a l'infinit, i l'hiperplà projectiu $\mathbf{P}(\vec{A}) = A_\infty$ és l'hiperplà a l'infinit. Denotarem el punt $[u]$ de $\mathbf{P}(\vec{A})$ (on $u \neq 0$) amb u_∞.

Per tant, podem pensar $\widetilde{A}$ com una completació projectiva de A que s'ha obtingut afegint els punts a l'infinit que formen l'hiperplà A_∞.

Una propietat important de l'espai projectiu és que, donat un espai vectorial E, el complementari d'un hiperplà $\mathbf{P}(H)$ del seu espai projectiu $\mathbf{P}(E)$ té estructura d'espai afí. Aquesta és una propietat important a l'hora de presentar la propietat universal de $\widetilde{A}$.

Lema 5.1. *Sigui E un espai vectorial, i H un hiperplà de E. Es pot dotar el complementari $E_H = \mathbf{P}(E) \setminus \mathbf{P}(H)$ d'una estructura d'espai afí amb espai vectorial associat H. Aquesta estructura d'espai afí depèn exclusivament de H, i sota aquesta estructura afí E_H és isomorf a un hiperplà afí de E.*

Demostració. Sabem que H és un hiperplà de E, i per tant existeix un $w \in E \setminus H$ tal que $E = Kw \oplus H$. Per tant, qualsevol vector de $E \setminus H$ es pot escriure de manera única com $\lambda w + h$ amb $\lambda \neq 0$ i $h \in H$. Per tant, per a qualsevol punt $[u]$ de E_H, la classe d'equivalència conté un representant de la forma $w + \lambda^{-1}h$, amb $\lambda \neq 0$. Per tant podem veure que l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi\colon w + H &\longrightarrow E_H \\ w + h &\longmapsto [w + h] \end{aligned}$$

és una bijecció. Per tal de determinar l'estructura afí en E_H, definim la operació suma de la següent manera:

$$\begin{aligned} +\colon E_H \times H &\longrightarrow E_H \\ ([w + h_1], h_2) &\longmapsto [w + h_1 + h_2] \end{aligned}$$

Els axiomes que defineixen un espai afí es verifiquen de manera trivial. Ara, $w+H$ és un hiperplà afí en E, i sota l'estructura afí que hem donat a E_H, l'aplicació φ definida anteriorment és una afinitat bijectiva. Per tant, E_H és isomorf a un hiperplà afí $w + H$.

Si haguessim triat un altre vector $w' \in E \setminus H$ tal que $E = Kw' \oplus H$, aleshores E_H hauria resultat isomorf a un hiperplà afí $w' + H$ paral·lel a $w + H$. Aquests hiperplans, però, són clarament isomorfs per traslació, i per tant l'estructura afí de E_H depèn només de H. □

A [5] es presenta la completació projectiva com a solució del següent problema universal:

Definició 5.1. *Donat un espai afí A associat a un espai vectorial $\vec{A}$, una completació projectiva de l'espai afí A amb hiperplà a l'infinit $\mathbf{P}(\mathscr{H})$ és una terna $(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \mathbf{P}(\mathscr{H}), i)$ on $\mathscr{E}$ és un espai vectorial, $\mathscr{H}$ és un hiperplà en $\mathscr{E}$, $i\colon A \longrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{E})$ és una afinitat injectiva tal que $i(A) = \mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ (on $\mathscr{E}_{\mathscr{H}} = \mathbf{P}(\mathscr{E}) \setminus \mathbf{P}(\mathscr{H})$), i per a cada espai projectiu $\mathbf{P}(F)$, cada hiperplà H en F, i cada afinitat $f\colon A \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ tal que $f(A) \subseteq F_H$ (on $F_H = \mathbf{P}(F) \setminus \mathbf{P}(H)$), existeix una única aplicació projectiva $\widetilde{f}\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ tal que*

$$f = \widetilde{f} \circ i \quad i \quad \mathbf{P}(\vec{f}) = \widetilde{f} \circ \mathbf{P}(i)$$

on $i\colon \vec{A} \longrightarrow \mathscr{H}$ i $\vec{f}\colon E \longrightarrow H$ són les aplicacions lineals associades a les afinitats definides anteriorment, com mostra el següent diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{E}_{\mathscr{H}} \subseteq \mathbf{P}(\mathscr{E}) \supseteq \mathbf{P}(\mathscr{H}) \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \mathbf{P}(\vec{A}) \arrow[l, "\mathbf{P}(i)"'] \arrow[dl, "\mathbf{P}(\vec{f})"] \\
& F_H \subseteq \mathbf{P}(F) \supseteq \mathbf{P}(H) &
\end{tikzcd}
$$

Com tots els objectes definits per una propietat universal, una completació projectiva és única llevat d'isomorfisme. La importància de la noció de completació projectiva està en el fet que qualsevol afinitat $f\colon A \longrightarrow A'$ es pot estendre de manera única en una aplicació projectiva $\widetilde{f}\colon \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A'}$, com veurem més endevant.

Veurem ara que la terna $(\widetilde{A}, \mathbf{P}(\vec{A}), i)$ és una completació projectiva de A, amb $i\colon A \longrightarrow \widetilde{A}$ la injecció de A en $\widehat{A} = A \cup \mathbf{P}(\vec{A})$.

Primer, observem que si E és un espai vectorial i H un hiperplà en E, aleshores l'embolcall vectorial $\widehat{E_H}$ (recordem que $E_H = \mathbf{P}(E) \setminus \mathbf{P}(H)$ té estructura afí) és isomorf a E. La prova és simple, i utilitza el fet que existeix una bijecció afí entre E_H i l'hiperplà afí $w + H$ en E, on $w \in E \setminus H$ és un vector fixat qualsevol. Escollint w com origen en E_H, sabem que $\widehat{E_H} = H + Kw$ (on $+$ és, en aquest cas, l'operació en l'embolcall vectorial), i com que $E = H \oplus Kw$, es pot veure clarament com definir una bijecció lineal entre $\widehat{E_H} = H + Kw$ i $E = H \oplus Kw$. Per tant, els espais projectius $\widetilde{E_H}$ i $\mathbf{P}(E)$ són isomorfs, és a dir, existeix una projecció entre ells.

Lema 5.2. *Donat un espai afí $(A, \vec{A})$, per a cada espai projectiu $\mathbf{P}(F)$, cada hiperplà H en F i cada afinitat $f\colon A \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ tal que $f(A) \subseteq F_H$, existeix una única projectivitat $\widetilde{f}\colon \widetilde{A} \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ tal que*

$$f = \widetilde{f} \circ i \quad i \quad \mathbf{P}(\vec{f}) = \widetilde{f} \circ \mathbf{P}(i)$$

on $i\colon \vec{A} \longrightarrow \vec{A}$ i $\vec{f}\colon \vec{A} \longrightarrow H$ són les aplicacions lineals associades a les aplicacions afins $i\colon A \longrightarrow \widetilde{A}$ i $f\colon A \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ com mostra el diagrama següent:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A \subseteq \widetilde{A} \supseteq \mathbf{P}(\vec{A}) \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \mathbf{P}(\vec{A}) \arrow[l, "\mathbf{P}(i)"'] \arrow[dl, "\mathbf{P}(\vec{f})"] \\
& F_H \subseteq \mathbf{P}(F) \supseteq \mathbf{P}(H) &
\end{tikzcd}
$$

Demostració. Hem vist l'existència de $\widetilde{f}$ com una conseqüència del teorema 4.2, i podem observar que $\widehat{F_H}$ és isomorf a F. Considerem l'aplicació projectiva $\mathbf{P}(\widehat{f})\colon \widetilde{A} \longrightarrow \mathbf{P}(F)$, on $\widehat{f}\colon \widehat{A} \longrightarrow F$ és l'única aplicació lineal que exté f. Falta per provar la unicitat de $\widetilde{f}$. Com que $f\colon A \longrightarrow F_H$ és una afinitat, per qualssevol $a \in A$ i $u \in \vec{A}$ tenim

$$f(a + u) = f(a) + \vec{f}(u),$$

on $\vec{f}\colon \vec{A} \longrightarrow H$ és una aplicació lineal. Si fixem un $a \in A$, aleshores $f(a) = [w]$ per algun $w \in F \setminus H$ i $F = Kw \oplus H$. Suposem que existeix $\widetilde{f}\colon \widetilde{A} \longrightarrow \mathbf{P}(F)$ amb la propietat desitjada. Aleshores existeix una aplicació lineal $g\colon \widehat{A} \longrightarrow F$ tal que $\widetilde{f} = \mathbf{P}(g)$. Com que $f = \widetilde{f} \circ i$, tenim $f(a) = [w] = [g(a)]$, i per tant $g(a) = \mu w$ per algun $\mu \neq 0$. A més, per tot $u \in \vec{A}$,

$$
\begin{aligned}
f(a + u) = [w] + \vec{f}(u) &= [w + \vec{f}(u)] = [g(a + u)] \\
&= [g(a) + g(u)] = [\mu w + g(u)],
\end{aligned}
$$

i, per tant,

$$\lambda(u)w + \lambda(u)\vec{f}(u) = \mu w + g(u),$$

per algun $\lambda(u) \neq 0$. Si Ker $\vec{f} = \vec{A}$, l'aplicació lineal $\vec{f}$ és nul·la, i com que hem d'imposar que la restricció de $\widetilde{f}$ en $\mathbf{P}(\vec{A})$ sigui igual a $\mathbf{P}(\vec{f})$, l'aplicació lineal g ha de ser també nul·la en $\vec{A}$. Per tant, $\widetilde{f}$ és única, i en aquest cas la seva restricció a $\mathbf{P}(\vec{A})$ no està definida ja que no està definida en $\mathbf{P}(\mathrm{Ker}\vec{f})$ i tenim $\mathrm{Ker}\vec{f} = \vec{A}$.

Si $\vec{A} \setminus \mathrm{Ker}\vec{f} \neq \varnothing$, prenent una base de Im $\vec{f}$ i la seva antiimatge obtenim una base B d'un subespai $\vec{G}$ de $\vec{A}$ tal que $\vec{A} = \mathrm{Ker}\vec{f} \oplus \vec{G}$. Com que $\vec{A} = \mathrm{Ker}\vec{f} \oplus \vec{G}$, on dim $\vec{G} \geq 1$, per qualsevol $x \in$ Ker $\vec{f}$ i qualsevol vector no nul $y \in \vec{G}$, tenim

$$\begin{aligned} \lambda(x)w &= \mu w + g(x), \\ \lambda(y)w + \lambda(y)\vec{f}(y) &= \mu w + g(y), \end{aligned}$$

i

$$\lambda(x+y)w + \lambda(x+y)\vec{f}(x+y) = \mu w + g(x+y),$$

que, per linealitat dóna

$$(\lambda(x+y) - \lambda(x) - \lambda(y) + \mu)\, w + (\lambda(x+y) - \lambda(y))\, \vec{f}(y) = 0.$$

Com que $F = Kw \oplus H$ i $\vec{f}\colon \vec{A} \longrightarrow H$, aleshores $\lambda(x+y) = \lambda(y)$ i $\lambda(x) = \mu$. Per tant, g és igual a $\vec{f}$ en Ker $\vec{f}$.

Si dim $\vec{G} = 1$, aleshores per qualsevol $y \in \vec{G}$ tenim

$$\lambda(y)w + \lambda(y)\vec{f}(y) = \mu w + g(y),$$

i per qualsevol $\nu \neq 0$ tenim

$$\lambda(\nu y)w + \lambda(\nu y)\vec{f}(\nu y) = \mu w + g(\nu y)$$

que, per linealitat, dóna

$$(\lambda(\nu y) - \nu\lambda(y) - \mu + \nu\mu)\, w + (\nu\lambda(\nu y) - \nu\lambda(y))\, \vec{f}(y) = 0.$$

Com que $F = Kw \oplus H$, $\vec{f}\colon \vec{A} \longrightarrow H$ i $\nu \neq 0$, tenim que $\lambda(\nu y) = \lambda(y)$, i per tant $(\lambda(y) - \mu)(1-\nu) = 0$.

Si $K = \{0, 1\}$, com que l'únic escalar no nul és 1, és inmediat que $g(y) = \vec{f}(y)$. Per altra banda, per $\nu \neq 0, 1$, tenim que $\lambda(y) = \mu$ per qualsevol $y \in \vec{G}$. Per tant $g = \mu\vec{f}$ en $\vec{A}$, i la restricció de $\widetilde{f} = \mathbf{P}(g)$ en $\mathbf{P}(\vec{A})$ és igual a $\mathbf{P}(\vec{f})$. Però ara g queda totalment determinada per

$$g(u + \lambda a) = \lambda g(a) + g(u) = \lambda\mu w + \mu\vec{f}(u).$$

Per tant, tenim que $g = \lambda\widehat{f}$.

Per altra banda, si dim $\vec{G} \geq 2$, donats dos vectors diferents u i v de la base B,

$$\begin{aligned} \lambda(u)w + \lambda(u)\vec{f}(u) &= \mu w + g(u) \\ \lambda(v)w + \lambda(v)\vec{f}(v) &= \mu w + g(v) \end{aligned}$$

i

$$\lambda(u+v)w + \lambda(u+v)\vec{f}(u+v) = \mu w + g(u+v)$$

i, per linealitat, obtenim

$$(\lambda(u+v) - \lambda(u) - \lambda(v) + \mu)\, w + (\lambda(u+v) - \lambda(u))\, \vec{f}(u) + (\lambda(u+v) - \lambda(v))\, \vec{f}(v) = 0.$$

Com que $F = Kw \oplus H$, $\vec{f}\colon \vec{A} \longrightarrow H$ i $\vec{f}(u)$ i $\vec{f}(v)$ són linealment independents (per injectivitat de $\vec{f}$ dins $\vec{G}$), tenim que

$$\lambda(u+v) = \lambda(u) = \lambda(v) = \mu,$$

i per tant $g = \mu\vec{f}$ en $\vec{A}$, i la restricció de $\widetilde{f} = \mathbf{P}(g)$ en $\mathbf{P}(\vec{A})$ és igual a $\mathbf{P}(\vec{f})$. Com al cas anterior, per tant, g queda totalment determinada per

$$g(u+\lambda a) = \lambda g(a) + g(u) = \lambda\mu w + \mu\vec{f}(u).$$

Aleshores, tenim $g = \lambda\widehat{f}$ i, per tant, $\widetilde{f}$ és única. □

Hem vist, per tant, que la terna $(\widetilde{A}, \mathbf{P}(\vec{A}), i)$ és la competació projectiva de l'espai afí A.

La completació projectiva d'un espai afí és una molt bona construcció en sentit geomètric, principalment perquè les propietats que veurem a continuació es compleixen.

5.3 Varietats i aplicacions entre completacions projectives

Començarem estudiant la relació entre les varietats afins d'un espai afí A i les corresponents varietats de la seva completació projectiva:

Teorema 5.3. *Sigui A un espai afí, i V una varietat afí de A identificada amb un subespai de l'embolcall vectorial $\widehat{A}$. Aleshores $\widetilde{V}$ s'identifica amb una subvarietat lineal projectiva de $\widetilde{A}$ i $\widetilde{V} \setminus V = V_\infty$ és un subespai projectiu de l'hiperplà A_∞. A més, per tal que dues varietats afins V i W siguin paral·leles és necessari i suficient que $V_\infty = W_\infty$.*

Demostració. Sigui V una varietat afí de A i $a \in V$ tal que $V = a \oplus \vec{V}$. Tenim que $\widehat{V} = Ka \oplus \vec{V}$ és un subespai vectorial de $\widehat{A} = Ka \oplus \vec{A}$, i per tant $\widetilde{V} = \mathbf{P}(Ka \oplus \vec{V})$ és un subespai projectiu de $\widetilde{A}$.

Si $\xi \in \widetilde{V}$, aleshores $\xi = \lambda z$ amb $z = \lambda a + \vec{h} \in (Ka \oplus \vec{V}) \setminus \{0\}$. Si $\lambda \neq 0$ aleshores $z = \lambda\left(a + \lambda^{-1}\vec{h}\right) = \lambda x$ amb $x \in V$ i $\xi \in Kx$. Per altra banda, si $\lambda = 0$ aleshores $Kz \subset \vec{V}$.

Si identifiquem V amb un subconjunt de $\widetilde{V}$, aleshores $\widetilde{V} \setminus V = V_\infty = \mathbf{P}(\vec{V}) \subset A_\infty$. □

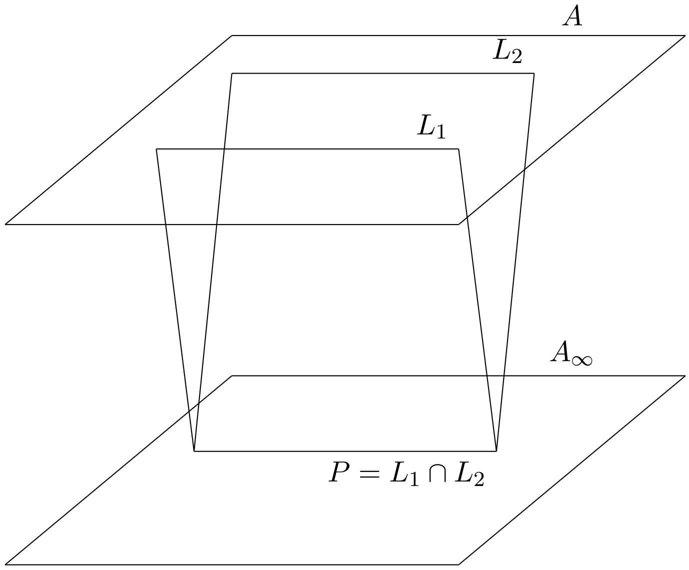


Figura 4: Dues rectes paral·leles a A es tallen en un punt a A_∞.

La correspondència $V \longmapsto \widetilde{V}$ és una bijecció entre el conjunt de varietats afins de A i el conjunt de subespais projectius de $\widetilde{A}$. Anomenarem V_∞ la varietat a l'infinit de V.

De la mateixa manera que una afinitat entre dos espais afins es pot estendre de manera única a una aplicació lineal entre els seus embolcalls vectorials, també es pot prolongar en una aplicació projectiva entre les seves completacions:

Teorema 5.4. *Siguin A, A' dos espais afins (sobre el mateix cos K), i $f \in \mathcal{A}\!f\!f(A; A')$. Aleshores f es prolonga en una aplicació projectiva $\widetilde{f}\colon \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A'}$ que envia A_∞ a A'_∞. La prolongació és única.*

Demostració. Sabem que f es prolonga en una única aplicació lineal $\widehat{f}\colon \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A'}$ definida per:

$$\widehat{f}(\lambda a + \overrightarrow{ax}) = \lambda f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax}) \qquad (\lambda \in K, \quad a, x \in A)$$

L'aplicació projectiva $\widetilde{f}$ induïda per $\widehat{f}$ verifica:

1. $\widehat{f}|_A = f$, perquè $\xi = Kz$ amb $z = a + \overrightarrow{ax} \in A$, $\widetilde{f}(\xi) = Kz'$ i $z' = f(z) \in A'$
2. $\widetilde{f}(A_\infty) \subset A'_\infty$ (surt de prendre $\lambda = 0$ a la definició de $\widehat{f}$).

La unicitat de $\widetilde{f}$ resulta de la de $\widehat{f}$. □

Aquest últim teorema admet un resultat recíproc.

Proposició 5.1. *Siguin A, A' dos espais afins, $\widetilde{A}, \widetilde{A'}$ les seves completacions projectives i ϕ una aplicació projectiva de $\widetilde{A}$ dins $\widetilde{A'}$. Aleshores perquè $\phi|_A$ sigui una afinitat de A en A' és necessari i suficient que $\phi(\widetilde{A}) \not\subseteq A'_\infty$ i que $\phi(A_\infty) \subset A'_\infty$.*

Demostració. Sigui $\widehat{\phi}\colon \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A'}$ una aplicació lineal de $\widehat{A}$ en $\widehat{A'}$ que indueix ϕ. Per hipòtesi existeix $z \in \widehat{A}$ tal que $\widehat{\phi}(z) \notin \vec{A}'$, i per tant, per hipòtesi, $z \notin \vec{A}$. Per tant existeix $k \in K^*$ tal que $kz = a \in A$, i com que sempre tenim $\widehat{\phi}(a) \notin \vec{A'}$ només queda reemplaçar $\widehat{\phi}$ per $k'\widehat{\phi}$ (amb $k' \in K^*$) i un pot suposar

$$a' = \widehat{\phi}(a) \in A'.$$

Identificant A (respectivament A') amb un subconjunt de $\widetilde{A}$ (respectivament de $\widetilde{A'}$), la linealitat de $\widehat{\phi}$ i el fet que $\widehat{A} = Ka \oplus \vec{A}$ es pot veure que

$$\widehat{\phi}(\lambda a + \vec{h}) = \lambda\phi(a) + \widehat{\phi}(\vec{h}) \qquad \Big(\lambda \in K, \quad \vec{h} \in \vec{A}\Big)$$

En particular, per tot $x \in A$

$$\phi(x) = \widehat{\phi}(x) = \widehat{\phi}(a + \overrightarrow{ax}) = \phi(a) + \widehat{\phi}(\overrightarrow{ax})$$

Com que $\widehat{\phi}|_{\vec{A}}$ és una aplicació lineal de $\vec{A}$ en $\vec{A}'$ (per hipòtesi), tenim que $\phi(A) \subset A'$ i que la restricció de ϕ a A és una afinitat d'aplicació lineal associada $\phi|_{\vec{A}}$. □

6 Aplicacions. Splines i formes polars

Un spline és una aplicació definida a trossos mitjaçant polinomis. La idea bàsica dels splines és la de dividir una superfície o una corba per tal d'aproximar-la de manera precisa amb els polinomis que formen l'spline, sota la condició que la funció sigui suau en els punts que uneixen els diferents trossos. És a dir, si els polinomis són de grau n o inferior, la funció ha de ser $\mathscr{C}^{n-1}$ als punts de unió entre polinomis

Com bé sabem, els polinomis són usats en diversos camps de les matemàtiques. Hi ha un procediment genèric que, donat un polinomi de grau n en una variable, el converteix en un polinomi de n variables de grau 1 en cada una. Aquest segon polinomi és l'anomenada *forma polar* del polinomi inicial.

Hi ha una branca de l'estudi dels splines basada en prendre la forma polar de cada un dels polinomis que el formen. A un report de Ramshaw [7] hi ha un anàlisi exhaustiu del plantejament "polar"dels splines, mentre que en aquesta secció presentem la relació que aquest té amb l'embolcall vectorial d'un espai afí.

Aquest plantejament polar està basat en el principi de polarització, que definirem més endavant, que transforma el comportament polinomial (resp. homogeni) en comportament multiafí (resp. multilineal). Per tant, el principi de polarització transforma cadascuna de les parts d'un spline en la seva forma polar, que és una funció simètrica i multiafí.

Com tot nou plantejament d'una teoria matemàtica, ha de poder proporcionar les demostracions dels teoremes més importants. La polarització pot donar demostracions clares i senzilles quan es complementa amb dues eines més: l'embolcall vectorial i la construcció mitjançant el producte tensorial.

6.1 El principi de polarització

Comencem donant un exemple de forma polar. Considerem el polinomi de grau 3 $G(t) = t^3 + 3t^2 - 6t - 8$. Una forma polar de G és una aplicació simètrica triafí $g(u, v, w)$ tal que $g(t, t, t) = G(t)$. Direm que g és triafí si és afí en cada una de les seves variables quan es deixen fixes les altres dues. Amb això tenim que:

$$g(u, v, w) = c_1uvw + c_2uv + c_3uw + c_4vw + c_5u + c_6v + c_7w + c_8, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Tenim per tant que $c_1 = 1$, $c_2 + c_3 + c_4 = 3$, $c_5 + c_6 + c_7 = -6$ i que $c_8 = -8$. Per tal que g sigui una funció simètrica cal $c_2 = c_3 = c_4$ i $c_5 = c_6 = c_7$. Per tant tenim una única opció:

$$g(u, v, w) = uvw + uv + uw + vw - 2u - 2v - 2w - 8$$

El procediment contrari és trivial.

Teorema 6.1 (Principi de polarització)**.** *Els polinomis $F(t)$ de grau n són equivalents als polinomis n-afins i simètrics $f(u_1, ..., u_n)$ en el sentit que, donat un polinomi de qualsevol tipus, existeix un únic polinomi de l'altre tipus que compleix $F(t) = f(t, ..., t)$.* □

Definició 6.1. *Sigui $F(t)$ un polinomi de grau n, la forma polar de F és un polinomi n-afí i simètric $f(u_1, ..., u_n)$ tal que $F(t) = f(t, ..., t)$.*

Al llibre de Berger [1] trobem definits els polinomis sobre espais vectorials, i podem observar que hi apareix de forma implícita el prinicipi de polarització.

Definició 6.2. *Siguin V, W dos espais vectorials. Una aplicació $f\colon V \longrightarrow W$ és una aplicació polinomial homogènia de grau k si existeix una aplicació simètrica k-lineal $\phi\colon V^k \longrightarrow W$ tal que $f = \phi \circ \Delta$, on $\Delta\colon V \longrightarrow V^k$ és l'aplicació diagonal $\Delta(x) = (x, ..., x)$.*

Notem per $P_k^*(V;W)$ el conjunt d'aplicacions polinomials homogènies de grau k de V en W. Si f és un polinomi homogeni de grau k, aleshores l'aplicació ϕ tal que $f = \phi \circ \Delta$ està unívocament determinada per f. Veiem, doncs, que la definició de polinomi sobre un espai vectorial porta a la definició unívoca de la forma polar.

Com hem comentat anteriorment, l'embolcall vectorial és necessari per demostrar teoremes importants. De fet, Berger dóna una definició de polinomi a un espai afí emprant aquest concepte.

Definició 6.3. *Sigui A un espai afí i W un espai vectorial. Una aplicació polinòmica de grau k en A és una aplicació $f\colon A \longrightarrow W$ tal que existeix $\widehat{f} \in P_k^*(\widehat{A};W)$ satisfent $\widehat{f}|_A = f$.*

El conjunt d'aquestes aplicacions és un espai vectorial, i el notarem per $P_k(A;W)$. Direm també que $\vec{f}$ és l'aplicació polinomial homogènia $\vec{f} = \widehat{f}|_{\vec{A}}$.

Un valor $f(u_1,...,u_n)$ de la forma polar és un valor polar de F, i cada u_i és un argument polar de F. En canvi, F és la forma diagonal de F, i cada valor $F(t)$ és un valor diagonal de F, i t és l'argument diagonal de F. El principi de polarització també és aplicable a polinomis en diverses variables.

6.2 Treballant amb polinomis sobre espais afins

Un cop vista la definició de polinomi en un espai afí, el següent pas és manipular-los per veure'n les propietats.

Si $F\colon L \longrightarrow G$ és un polinomi de grau n sobre una recta afí L, en podem considerar la forma polar $f\colon L^n \longrightarrow G$, o, considerant-la com una aplicació entre espais afins, podem prendre la seva prolongació lineal $\widehat{F}\colon \widehat{L} \longrightarrow \widehat{G}$. Utilitzant tant la polarització com el pas a l'embolcall vectorial (en qualsevol ordre) podem transformar F en una aplicació simètrica multilineal $\widehat{f}\colon (\widehat{L})^n \longrightarrow (\widehat{G})^n$.

Aquesta aplicació, que és la prolongació lineal de la forma polar, és una aplicació de gran importància ja que compleix la següent identitat amb la funció pes w de l'embolcall vectorial:

$$w\left(\widehat{f}(e_1,...,e_n)\right) = \prod_i w(e_i)$$

Per tant, una aplicació polinomial F té quatre formes: $F, f, \widehat{F}, \widehat{f}$ en funció de si s'ha aplicat la polarització, s'ha près la prolongació lineal o s'han fet els dos procediments. Anomenem aquestes formes la *forma diagonal*, *prolongació lineal diagonal*, *polarització* o *prolongació lineal polar*.

6.3 Splines sobre espais afins

Hem vist, doncs, que treballant sobre espais afins, l'embolcall vectorial i el principi de polarització ens permeten definir el concepte de polinomi (o aplicació polinomial) sobre aquest espai afí. Amb això, doncs, tenim les eines per construir splines sobre l'espai afí, que a més tindran un bon comportament respecte la funció pes.

En aquest treball no s'entrarà en més detalls, ja que per poder fer un estudi complet dels splines sobre espais afins calen eines que van més enllà de l'objectiu del treball, que és l'estudi de l'embolcall vectorial. Aquesta secció, doncs, pretén il·lustrar el fet que l'embolcall vectorial, tot i ser un concepte força abstracte, té fortes implicacions en l'estudi de corbes i superfícies en l'espai. Al report [7] es fa un estudi en profunditat del plantejament polar de l'estudi dels splines. En primer lloc es presenten 8 mètodes de polarització de polinomis, encarats des de diferents vessants. Un cop vistes les diferents vies per polaritzar un polinomi, s'introdueix l'embolcall vectorial i s'utilitza el producte tensorial per convertir el polinomi simètric multilineal $\widehat{f}$ en una aplicació lineal entre certs espais vectorials, definits a les seccions 7 i 8 de l'article. Un cop introduïdes aquestes eines, es fa l'estudi des del punt de vista "polar"del concepte de continuïtat i dels splines per corbes i superfícies a l'espai.

7 Embolcall vectorial. Construccions alternatives

A la secció 4 s'ha mostrat la construcció feta per Berger i Frenkel a [1, 4] de l'embolcall vectorial, però no és l'única. Diversos autors han tractat aquest tema, i en aquesta secció farem un repàs de les diferents construccions vistes a la bibliografia, fent èmfasi en una d'elles.

En primer lloc, doncs, es mostra la construcció donada a l'article [6], que proporciona una eina més amb la qual es poden obtenir resultats interessants. Per altra banda, al final de la secció, es presenta un petit repàs bibliogràfic de les construccions donades per diferents autors.

7.1 Un problema universal per espais afins

Sigui A un espai afí. Considerem un espai vectorial E i una aplicació afí $j\colon A \longrightarrow E$ complint la següent propietat universal per a funcions afins:

Per a tot espai vectorial F i tota funció afí $h\colon A \longrightarrow F$, existeix una única aplicació lineal $h^\wedge\colon E \longrightarrow F$ tal que $h = h^\wedge \circ j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[d, "h^\wedge"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Teorema 7.1. *Un parell (E, j) satisfà la propietat universal anterior si i només si j és injectiva i $j(A) \subset E$ és un hiperplà propi.*

Demostració. Les funcions afins $h\colon A \longrightarrow F$ separen punts, i per tant l'aplicació j és necessàriament injectiva. El conjunt $j(A) \subset E$ és un espai afí. Per tant, $h^\wedge$ existeix si i només si $j(A)$ és o bé un hiperplà propi o bé tot l'espai E. La segona opció és impossible, ja que una funció constant $h \neq 0$ mai pot ser lineal. Per tant sabem que $j(A)$ és un hiperplà propi, i la proposició 3.2 prova la existència de $h^\wedge$. □

Direm que el parell (E, j) és un embolcall vectorial de A.

Com és habitual en problemes universals, la solució és única llevat d'isomorfismes.

En efecte, considerem un segon embolcall vectorial $j'\colon A \longrightarrow E'$ de A. La propietat universal del primer i l'aplicació lineal j' proporcionen una aplicació lineal $f\colon E \longrightarrow E'$ tal que $j' = f \circ j$. Cal provar, per tant, que f és un isomorfisme.

Fent el mateix raonament en el sentit contrari podem veure que existeix una aplicació lineal $g\colon E' \longrightarrow E$ tal que $j = g \circ j'$. Per tant $j = g \circ f \circ j$, i per tant $g \circ f = \mathrm{Id}$. Tenim el mateix en l'ordre invers, i per tant g és la inversa de f i f és un isomorfisme.

Proposició 7.1. *Sigui E un espai vectorial, $w\colon E \longrightarrow K$ una forma lineal no nul·la. Si $A_1 = w^{-1}(1)$ i $A_0 = w^{-1}(0)$, aleshores A_1 és un espai afí amb espai director A_0, i la inclusió $j\colon A_1 \hookrightarrow E$ és un embolcall vectorial de A_1.*

Demostració. Considerem la terna (A_1, A_0, ϕ), on ϕ és l'aplicació que, a cada element $v \in A_0$ li correspon l'aplicació traslació

$$\begin{aligned} t_v\colon A_1 &\longrightarrow A_1 \\ x &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

Aquesta aplicació està ben definida ja que, $w(x + v) = w(x) + w(v) = 1$ per linealitat. A més, l'aplicació és clarament un isomorfisme, ja que, si $x \in A_1$, $\exists! x_0 \in A_1$ tal que $x = x_0 + v$.

Per veure que (A_1, A_0, ϕ) és un espai afí, comprovem que compleix els axiomes de 2.1.

- $(A1)$: Considerem $v_0, v_1 \in A_0$, és clar que $\forall x \in A_1$ es compleix $(x+v_0)+v_1 = x+(v_0+v_1)$.
- $(A2)$: Prenem $x \in A_1$, clarament l'únic element $v \in A_0$ que compleix $x = x + v$ és el 0.
- $(A3)$: Siguin $x_0, x_1 \in A_1$, volem veure que $\exists v \in A_0$ tal que $x_1 = x_0 + v$. Sabem que $v = \overrightarrow{x_0 x_1}$ compleix la igualtat, falta veure si és un element de A_0. En efecte,

$$w(\overrightarrow{x_0 x_1}) = w(x_1 - x_0) = w(x_1) - w(x_0) = 1 - 1 = 0$$

Per tant, (A_1, A_0, ϕ) és un espai afí. Falta veure que $j\colon A_1 \hookrightarrow E$ és un embolcall vectorial de A_1.

Sabem que j és injectiva per ser una inclusió, i $A_1 = w^{-1}(1)$ és un hiperplà propi per la proposició 3.1. Per tant, (E, j) és un embolcall vectorial de A_1. □

Sabem (per la proposició 3.1) que existeix una única forma lineal (funció pes) $w\colon \widehat{A} \longrightarrow K$ tal que $j(A) = w^{-1}(1)$. Per tant, de la mateixa manera que amb A, podem identificar l'espai de les translacions $\vec{A}$ amb un subespai de $\widehat{A}$, $w^{-1}(0)$.

7.1.1 Construcció

La construcció és similar a la donada per Berger i Frenkel a [1, 4], utilitzant els camps vectorials constant i central i les seves identificacions amb $\vec{A}$ i $K^* \times A$. La principal diferència es troba en el fet que a [6], com hem vist, es defineix què és un embolcall vectorial, i es prova després que el parell $(\widehat{A}, j)$, on

$$\widehat{A} = \vec{A} \sqcup K^* \times A$$
$$j\colon A \hookrightarrow \widehat{A} \text{ definida per } j(a) = f_{(1,a)}$$

és un embolcall vectorial de A. Aquesta construcció és per tant menys artificial que la donada a [1, 4], on directament es defineix el conjunt i es prova que A n'és un hiperplà afí.

De fet, a [6] es prova que l'embolcall vectorial és un functor:

Teorema 7.2. *L'assignació $A \rightsquigarrow \widehat{A}$, $f \rightsquigarrow \widehat{f}$ és un functor covariant de la categoria de K-espais afins* **Aff** *en la categoria de K-espais vectorials* **Vect**.

7.1.2 Homogeneïtzació

Aquesta construcció de l'embolcall mitjançant una propietat universal ens dona una nova eina amb la qual treballar.

Sigui $h\colon A \longrightarrow F$ una funció afí en un espai vectorial. L'aplicació $h^\wedge\colon \widehat{A} \longrightarrow F$ donada per la propietat universal de l'embolcall vectorial és una prolongació de h, que anomenarem homogeneïtzació de h.

De fet, la funció pes $w\colon \widehat{A} \longrightarrow K$ és la homogeneïtzació de la funció constant 1 en A: $w = (1_A)^\wedge$.

Fem un resum dels elements exposats fins ara en el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \vec{A} \arrow[r, "i_A"] & \widehat{A} \arrow[r, "w_A"] & K \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[u, hook, "j_A"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposició 7.2. *Sigui A un espai afí. Per a qualsevol espai vectorial F, l'aplicació homogeneïtzació*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\!f\!f(A,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(\widehat{A},F) \\ h \quad &\longmapsto \quad h^\wedge \end{aligned} \tag{1}$$

és un isomorfisme lineal. En particular,

$$\mathcal{A}\!f\!f(A,K) \cong \widehat{A}^* \quad i \quad \mathcal{A}\!f\!f(A,K)^* \cong \widehat{A}^{**}$$

Demostració. La linealitat de l'aplicació $h \longmapsto h^\wedge$ és conseqüència de la unicitat de l'homogeneïtzació: com que $(h+k)^\wedge$ i $h^\wedge + k^\wedge$ coincideixen en $j(A)$, aleshores coincideixen arreu. Un argument similar s'utilitza per λh.

L'aplicació $h \longmapsto h^\wedge$ és injectiva, ja que diferents funcions h tenen necessàriament homogeneïtzacions diferents. A més, és exhaustiva, ja que qualsevol aplicació lineal $\widehat{A} \longrightarrow F$ es pot restringir a una una aplicació afí $A \longrightarrow F$ de la qual és una prolongació. □

Vegem ara com es poden estudiar les propietats de l'homogeneïtzació a partir de l'afinitat i viceversa:

Proposició 7.3. *Sigui $h\colon A \longrightarrow F$ una aplicació afí i $h^\wedge\colon \widehat{A} \longrightarrow F$ la seva homogeneïtzació. Aleshores:*

1. *$h^\wedge$ és exhaustiva si i només si $h(A) \subset F$ genera F.*
2. *$h^\wedge$ és injectiva si i només si h és injectiva i mai és zero.*
3. *$h^\wedge$ és bijectiva si i només si h és injectiva i $h(A) \subset F$ és un hiperplà propi.*

Demostració.

1. Pel lema 3.3, sabem que una aplicació lineal $T\colon E \longrightarrow F$ està determinada per la seva restricció en un subconjunt afí $H \subset E$ si i només si H és un hiperplà propi de E o $H = E$. En aquest cas, tenim que h és la restricció de $h^\wedge$ en A, que és un hiperplà propi de $\widehat{A}$, i per tant $h^\wedge$ ve determinada per h, i és exhaustiva si i només si $\langle h(A)\rangle = F$.

2. En primer lloc, suposem $h^\wedge$ injectiva i $h(x) = 0$ per algun $x \in A$. Aleshores:

$$h(x) = 0 \;\Rightarrow\; h(x) = h^\wedge(j(x)) = 0 \;\Rightarrow\; j(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

on hem utilitzat que j és injectiva.

Suposem ara h injectiva i que no s'anul·la mai. Si $h^\wedge$ no és injectiva, aleshores existeix $x_0 \in \widehat{A}$ no nul tal que $h^\wedge(x_0) = 0$. A més, sabem que $\langle j(A)\rangle = \widehat{A}$, per tant x_0 és una combinació lineal d'elements de $j(A)$, és a dir, $x_0 = \sum_i \lambda_i j(y_i)$, amb $y_i \in \widehat{A}$. Per tant:

$$h\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = h^\wedge\left(j\left(\sum_i \lambda_i y_i\right)\right) = h^\wedge\left(\sum_i \lambda_i j(y_i)\right) = h^\wedge(x_0) = 0$$

i h s'anul·la per un punt diferent de 0. Per tant $h^\wedge$ és injectiva.

3. Conseqüència directa dels enunciats anteriors.

□

Treballar amb la homogeneïtzació ens permet demostrar un resultat interessant respecte a la prolongació lineal d'una afinitat:

Proposició 7.4. *Siguin A, B espais afins. Considerem l'aplicació prolongació lineal:*

$$\begin{aligned} Vh\colon \mathcal{A}\!f\!f(A,B) &\longrightarrow \mathcal{L}(\widehat{A},\widehat{B}) \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned} \tag{2}$$

Aleshores:

1. *Vh és una afinitat injectiva.*
2. *La imatge de Vh és el conjunt $\{T \in \mathcal{L}(\widehat{A},\widehat{B}) \mid T(A) \subset B\}$.*
3. *L'embolcall vectorial de $\mathcal{A}\!f\!f(A,B)$ s'identifica amb $\{T \in \mathcal{L}(\widehat{A},\widehat{B}) \mid T(\vec{A}) \subset \vec{B}\}$.*

Demostració. L'aplicació Vh és injectiva ja que dues aplicacions diferents tenen homogeneïtzacions diferents.

Sabem que $\mathcal{A}\!f\!f(A,B)$ té estructura d'espai vectorial amb espai director $\mathcal{A}\!f\!f(A,\vec{B})$. El fet que l'aplicació extensió sigui una afinitat és conseqüència de

$$\widehat{f+h} = \widehat{f} + i_B \circ h^{\wedge},$$

que es dóna per aplicacions afins $f\colon A \longrightarrow B$ i $h\colon A \longrightarrow \vec{B}$. Pel lema 3.3, per provar aquesta igualtat és suficient veure que aquestes aplicacions lineals coincideixen en l'hiperplà A:

$$(\widehat{f} + i_B \circ h^{\wedge}) \circ j_A = \widehat{f} \circ j_A + i_B \circ h^{\wedge} \circ j_A = j_B \circ f + i_B \circ h = j_B \circ (f+h) = (\widehat{f+h}) \circ j_A$$

El segon enunciat és senzill de demostrar: una aplicació lineal $T\colon \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ es restringeix a una aplicació afí $A \longrightarrow B$ si i només si $T(A) \subset B$.

Pel tercer enunciat considerem la forma lineal

$$\begin{aligned} w\colon \{T \in \mathcal{L}(\widehat{A},\widehat{B}) \mid T(\vec{A}) \subset \vec{B}\} &\longrightarrow K \\ T &\longmapsto w_B(T(a)) \end{aligned}$$

és a dir, la funció pes de T és el pes de les seves imatges. Aquesta aplicació està ben definida, és lineal i té imatge 1 si i només si $T(A) \subset B$. Aplicant la proposició 7.1 es prova el resultat. $\square$

7.1.3 Embolcall vectorial d'un espai vectorial

Un cas particular és aquell en el que un espai afí E és també un espai vectorial. Amb la caracterització donada de l'embolcall vectorial, podem fer-ne la identificació canònica amb l'espai vectorial $\widehat{E} = K \times E$, amb l'inclusió afí $j_E(u) = (1, u)$. Aleshores la funció pes és $w_E(\lambda, u) = \lambda$.

Considerem l'afinitat entre espais vectorials

$$\begin{aligned} h\colon E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto h_0 + h_1 \cdot u \end{aligned}$$

on $h_0 \in F$ i $h_1\colon E \longrightarrow F$ és lineal. Aleshores tenim que $h^{\wedge}\colon K \times E \longrightarrow F$ és l'aplicació lineal $h^{\wedge}(\lambda, u) = h_0\lambda + h_1 \cdot u$, que justifica el nom homogeneïtzació.

$$\begin{tikzcd} K \times E = \widehat{E} \arrow[r, "h^{\wedge}"] & F \\ E \arrow[u, hook, "j_E"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Vegem ara com és la prolongació lineal. Donada una afinitat $h\colon A \longrightarrow F$, la seva prolongació lineal $\widehat{h}\colon \widehat{A} \longrightarrow \widehat{F} = K \times F$ ve donada per $\widehat{h} = (w_A, h^\wedge)$. Per tant cal anar en compte alhora de distingir $h^\wedge$ i $\widehat{h}$. Vegem-ho en aquest diagrama no commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{A} \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[dr, "h^\wedge"] & \widehat{F} \\
A \arrow[u, hook, "j_A"] \arrow[r, "h"'] & F \arrow[u, hook', "j_F=(1,\mathrm{Id}_F)"']
\end{tikzcd}$$

Això es pot aplicar, en particular, a una afinitat $h\colon E \longrightarrow F$ entre espais vectorials, $h(u) = h_0 + h_1 \cdot u$. La seva prolongació lineal és l'aplicació

$$\begin{aligned}\widehat{h}\colon K \times E &\longrightarrow K \times F\\ (\lambda, u) &\longmapsto (\lambda, h_0\lambda + h_1 \cdot u)\end{aligned}$$

Considerem ara un espai vectorial F i un subespai afí $A \subset F$, amb la inclusió $h\colon A \hookrightarrow F$. Si $0 \notin A$, aleshores, per la proposició 7.3, podem considerar $\widehat{A}$ com a subespai de F via $h^\wedge\colon \widehat{A} \hookrightarrow F$. D'altra banda, si $0 \in A$, aleshores $\widehat{A}$ no es pot indentificar amb cap subespai de F, però aplicant la proposició 4.3 l'aplicació $\widehat{h}\colon \widehat{A} \hookrightarrow \widehat{F} = K \times F$ identifica A amb un subespai de $K \times F$.

7.2 Repàs bibliogràfic

A continuació veurem, de manera no detallada, com altres autors han definit l'embolcall vectorial.

La construcció de l'embolcall vectorial d'un espai afí A apareix com un exercici a [3]. En aquest cas $\widehat{A}$ es construeix com el quocient $K^{(A)}/N$, on $K^{(A)}$ és l'espai vectorial que té tots els punts de A com a base, i N el subespai generat per les relacions

$$[p+u] - [p] - [q+u] + [q] \qquad [p+\lambda u] - [p] - \lambda[q+u] + \lambda[q],$$

amb $p, q \in A$, $u \in \vec{A}$, $\lambda \in K$. En aquest cas l'aplicació

$$\begin{aligned}j\colon A &\longrightarrow \widehat{A}\\ p &\longmapsto [p],\end{aligned} \tag{3}$$

és una solució al problema universal plantejat a la secció 7.1.

Com hem comentat a la secció 6, a [7] apareix una definició de l'embolcall: si A és un espai afí, un espai vectorial $\widehat{A}$ amb la forma lineal $w\colon \widehat{A} \longrightarrow K$ (funció pes) tal que $A = w^{-1}(1)$ s'anomena linearització de A. Tot i això, no es dóna una construcció explícita de $\widehat{A}$.

Un camp vectorial $X\colon A \longrightarrow \vec{A}$ defineix una aplicació $f_X\colon A \longrightarrow A$, donada per $f_X(p) = p + X(p)$, i viceversa. Això indueix una bijecció entre camps vectorials centrals i les seves aplicacions corresponents, que constitueixen la definició de l'embolcall vectorial a [5]: l'homogeneïtzació $\widehat{A}$ es defineix com la unió disjunta de traslacions T_u i les homotècies $H_{a,\lambda}$ on $H_{a,\lambda}(x) = a + \lambda\overrightarrow{ax}$. Tot i això, l'estructura d'espai vectorial no és clara sense considerar els camps vectorials. L'espai afí $\mathcal{A}\!f\!f(A, A)$ té un punt privilegiat, la identitat Id_A, per tant aquest espai té una estructura d'espai vectorial.

A [2], al final de la secció 1 trobem una construcció functorial de l'embolcall vectorial.

Podem observar doncs discrepància pel que fa a la terminologia emprada pels diferents autors per referir-se al que en aquest treball s'ha anomenat embolcall vectorial. Mentre que [6] l'anomena "vector hull", a [1] apareix el nom "universal space", a [7] s'usa el terme "linearization" i a [5] s'usen els termes "homogenization" i fins i tot "hat construction".

A més d'aquestes construccions, des d'un punt de vista més elemental podem prendre $\widehat{A} = K \oplus \vec{A}$. Podem trobar aquesta definició a llibres de geometria, que es dona amb la finalitat de definir la completació projectiva d'un espai afí. La principal contrapartida d'aquesta senzilla definició és que la inclusió $j\colon A \hookrightarrow \widehat{A}$ depèn de l'elecció d'un punt privilegiat en A.

8 Conclusions

L'objectiu del treball era presentar el concepte d'embolcall vectorial i treballar les seves implicacions. S'ha pogut definir de manera clara el concepte, i s'han mostrat diferents vies d'afrontar el mateix problema i, per tant, definir el mateix objecte.

A més de donar-ne la definició i construcció, s'ha pogut donar un altre plantejament a l'estudi dels espais afins, i s'ha pogut demostrar que es pot treballar la geometria afí amb l'avantatge que dóna l'àlgebra lineal. Per tant, s'han vist resultats que permeten caracteritzar afinitats i varietats afins, així com estudiar-ne les propietats. En el primer cas, s'ha pogut veure que es pot veure si una afinitat és o no injectiva o exhaustiva estudiant una aplicació lineal, que sempre és més senzill.

Per altra banda, s'ha pogut fer una construcció de la completació projectiva d'un espai afí, que ha donat un nou ambient on treballar la geometria afí, i ha permès, d'una manera similar a la de l'embolcall vectorial, caracteritzar les afinitats i les varietats afins.

La construcció de l'embolcall vectorial i el principi de polarització d'un polinomi han permès definir els polinomis sobre els espais afins que, juntament amb la teoria dels splines, permeten estudiar les corbes i superfícies en l'espai. L'embolcall vectorial, doncs, resulta una eina útil que permet donar un plantejament diferent a aquest camp de les matemàtiques aplicades.

Pel que fa a aquestes dues construccions que s'han presentat, s'ha pogut veure que compleixen una propietat universal, fet que permet afirmar que són construccions canòniques i que, per tant, no depenen de l'espai.

S'ha vist, per tant, que la geometria afí es pot tractar des de l'àlgebra lineal i la geometria projectiva.

Referències

[1] Berger, M.: Geometry I. Nathan, Paris (1977)

[2] Bertram, W.: "From linear algebra via affine algebra to projective algebra" *Linear Algebra Appl.* **378** (2004) 109–134

[3] Bourbaki, N.: Algebra I. Hermann, Paris (1970), chapters 1-3.

[4] Frenkel, J.: Géométrie pour l'élève-professeur. Hermann, Paris (1973).

[5] Gallier, J.: *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, Springer, New York (2001).

[6] Gràcia, X., Martín, R.: "Vector hulls of affine spaces and affine bundles", *Acta Applicandae Mathematicae* **103** (2008) 101–129.

[7] Ramshaw, L.: "Blossoms are polar forms", Comput. Aided Geom. Des. **6**, 323-358 (1989)